

Pembangkitan Pola Simetri $p2mm$ dari Simulasi Sistem Dinamik

Windi Oli Viera¹, Mahdhivan Syafwan^{2*}, Budi Rudianto³

Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA Universitas Andalas, Padang, Indonesia

*e-mail: mahdhivan@sci.unand.ac.id

Diajukan: 1 Desember 2020, Diperbaiki: 2 Agustus 2022, Diterima: 12 September 2022

Abstrak

Pola simetri $p2mm$ adalah *wallpaper group* yang mempunyai simetri rotasi 180^0 , refleksi terhadap sumbu- x dan sumbu- y , dan translasi terhadap sumbu- x dan sumbu- y . Dalam artikel ini, pola simetri $p2mm$ berwarna dibangkitkan melalui sebuah simulasi sistem dinamik diskrit dengan terlebih dahulu melakukan analisis terhadap syarat dan pemilihan pada fungsi dinamikanya. Dalam pembangkitan pola $p2mm$ ini, setiap titik pada bidang dijadikan sebagai titik awal pada iterasi sistem dinamik diskrit, dan jumlah iterasi yang dihasilkan menentukan warna pada titik tersebut. Dengan menggunakan beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi dinamik, diperoleh variasi pola-pola $p2mm$ yang menarik dan estetik.

Kata kunci: $p2mm$, sistem dinamik diskrit, *wallpaper group*

Abstract

A $p2mm$ symmetrical pattern is a wallpaper group which has 180^0 rotational symmetries, reflections on the x and y axes, and translations to the x and y axes. In this paper, the coloured $p2mm$ symmetrical pattern is generated through a discrete dynamical system simulation, by firstly analyzing the conditions and the choice of the dynamical function. In generating this $p2mm$ pattern, each point on a plane is used as a starting point in the discrete dynamical system iteration, and the number of performed iterations determines a colour to that point. By using some combinations of parameter values in the dynamical function, a variety of interesting and aesthetic $p2mm$ patterns is obtained.

Keywords: $p2mm$, discrete dynamical systems, wallpaper group

1 Pendahuluan

Pola-pola simetri yang bernilai estetik telah banyak dibangkitkan oleh para peneliti melalui berbagai metode dengan menggunakan persamaan matematika. Salah satu pendekatan yang dilakukan adalah metode sistem dinamik diskrit yang dapat menghasilkan pola simetri *wallpaper* [1], simetri bola [2], simetri *frieze* [3], dan pengubinan Archimedean [4]. Selain itu juga dikembangkan metode iterasi berdasarkan teori titik tetap. Metode ini sukses dalam membangkitkan himpunan Mandelbrot and Julia yang diperumum [5,6] dan polinomiografi [7,8]. Lebih lanjut, variasi iterasi titik tetap dalam simulasi sistem dinamik diskrit juga telah dikaji sehingga diperoleh pola-pola simetri yang lebih bervariasi [9].

Khusus untuk pola simetri *wallpaper*, terdapat 17 jenis atau lebih dikenal dengan istilah *wallpaper group*, yang diberi nama sebagai berikut: $p1$, $p2$, pm , pg , $p2mm$, $p2mg$, $p2gg$, cm ,

$c2mm$, $p3$, $p3m1$, $p31m$, $p4$, $p4mm$, $p4gm$, $p6$ dan $p6mm$ [10]. Dalam hal ini huruf p dan c berturut-turut menyatakan sel primitif (kisi satuan) dan sel terpusat, m menunjukkan refleksi (*mirror*), g merepresentasikan glide-refleksi, sedangkan bilangan bulat menandakan orde dari rotasi. Jenis-jenis *wallpaper group* tersebut memiliki satu atau kombinasi dari keempat sifat isometri, yaitu translasi, refleksi, glide-refleksi dan rotasi. Sebagai contoh, pola simetri $p2mm$ merupakan pola simetri dengan kisi satuan persegi yang memiliki rotasi 180^0 (orde 2), refleksi terhadap sumbu- x dan sumbu- y , dan translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan masing-masing periode T dan T^* . Dengan memanfaatkan keunikan sifat simetri yang ada pada *wallpaper group* ini, beberapa peneliti di Indonesia melakukan klasifikasi motif-motif batik tradisional yang berkembang di berbagai daerah, lihat misalnya dalam [11].

Dalam artikel ini, pola simetri $p2mm$ secara khusus akan dibangkitkan melalui simulasi sistem dinamik diskrit berikut:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + g(x_n, y_n), \end{cases} \quad (1)$$

yang merupakan diskritisasi dari sistem

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y). \quad (2)$$

Dalam hal ini, syarat-syarat pada fungsi f dan g akan ditentukan sedemikian sehingga potret fasa (1) memenuhi sifat-sifat simetri yang berlaku pada pola $p2mm$. Penelitian ini mengikuti ide dan langkah-langkah yang sama dengan referensi [1], namun sistem dinamik diskrit yang digunakan pada referensi tersebut secara numerik tidak relevan dengan sistem (2). Penelitian serupa untuk pola $p4$ juga sudah dilakukan dan diperoleh pola-pola yang lebih menarik dan variatif [12].

Artikel ini ditulis dengan sistematika sebagai berikut. Pada Bagian 2 dijelaskan kembali syarat-syarat pada isometri yang dimiliki oleh pola $p2mm$. Hasil-hasil pada Bagian 2 menjadi dasar dalam pembahasan Bagian 3 dalam melakukan pemilihan fungsi dinamik f dan g sedemikian sehingga potret fasa (1) memenuhi pola $p2mm$. Selanjutnya pembangkitan pola simetri $p2mm$ disajikan pada Bagian 4. Terakhir, pada Bagian 5 dikemukakan kesimpulan dari hasil kajian.

2 Syarat-syarat pada Isometri

Isometri yang memenuhi *wallpaper group* jenis $p2mm$ adalah simetri translasi, simetri refleksi dan simetri rotasi. Berikut dijelaskan kembali syarat-syarat dari fungsi f dan g agar potret fasa dari sistem (1) memiliki ketiga simetri ini [1].

1. Simetri Translasi

Misalkan potret fasa dari sistem (1) mempunyai simetri translasi dengan periode T sepanjang sumbu- x , artinya potret fasa tersebut tidak berubah setelah dilakukan transformasi $x' = x - T$ dan $y' = y$. Substitusikan x' dan y' tersebut ke Persamaan (1), diperoleh

$$\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n + f(x'_n + T, y'_n), \\ y'_{n+1} = y'_n + g(x'_n + T, y'_n). \end{cases} \quad (3)$$

Agar Persamaan (1) dan (3) identik, maka haruslah

$$\begin{cases} f(x + T, y) = f(x, y), \\ g(x + T, y) = g(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

Dengan cara yang sama, jika potret fasa dari sistem (1) mempunyai simetri translasi dengan periode T^* sepanjang sumbu- y , maka haruslah berlaku

$$\begin{cases} f(x, y + T^*) = f(x, y), \\ g(x, y + T^*) = g(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Selanjutnya jika potret fasa dari sistem (1) mempunyai simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y sekaligus dengan periode masing-masing T dan T^* , maka berlaku Persamaan (4) dan (5), yaitu

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T^*), \\ g(x, y) = g(x + T, y) = g(x, y + T^*). \end{cases} \quad (6)$$

2. Simetri Refleksi

Misalkan potret fasa (1) mempunyai simetri refleksi terhadap sumbu- x , yaitu berlaku transformasi $x' = x$ dan $y' = -y$. Substitusikan x' dan y' tersebut ke Persamaan (1), maka diperoleh

$$\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n + f(x'_n, -y'_n), \\ y'_{n+1} = y'_n - g(x'_n, -y'_n). \end{cases} \quad (7)$$

Agar Persamaan (1) dan (7) identik, maka haruslah

$$\begin{cases} f(x, -y) = f(x, y), \\ g(x, -y) = -g(x, y). \end{cases} \quad (8)$$

Dengan cara yang sama, jika potret fasa dari sistem (1) mempunyai simetri refleksi terhadap sumbu- y , maka berlaku

$$\begin{cases} f(-x, y) = -f(x, y), \\ g(-x, y) = g(x, y). \end{cases} \quad (9)$$

Selanjutnya jika potret fasa dari sistem (1) mempunyai simetri refleksi terhadap sumbu- x dan sumbu- y sekaligus, maka berlaku Persamaan (8) dan (9), yaitu

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, y), & (10) \\ g(x, y) = -g(x, -y) = g(-x, y). & (11) \end{cases}$$

3. Simetri Rotasi

Misalkan potret fasa dari sistem (1) tidak berubah setelah dirotasikan sebesar θ (berlawanan arah jarum jam). Dalam hal ini berlaku transformasi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (12)$$

dimana

$$T_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Substitusikan Persamaan (12) ke Persamaan (1) diperoleh

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} + T_\theta \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Agar Persamaan (1) dan (14) identik, maka haruslah

$$\begin{cases} f(x', y') = \cos \theta f(x, y) - \sin \theta g(x, y), & (15) \\ g(x', y') = \sin \theta f(x, y) + \cos \theta g(x, y). & (16) \end{cases}$$

3 Pemilihan Fungsi Dinamik

Agar potret fasa sistem (1) memiliki pola simetri $p2mm$, maka pemilihan fungsi f dan g dilakukan berdasarkan analisis terhadap sifat-sifat simetri translasi, refleksi dan rotasi yang telah dibahas pada Bagian 2. Dari Persamaan (12) diperoleh hasil rotasi (x, y) sebesar $\theta = \pi$ sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Selanjutnya untuk $\theta = \pi$, Persamaan (33) dan (34) menjadi

$$\begin{cases} f(x, y) = -f(x', y'), \\ g(x, y) = -g(x', y'). \end{cases} \quad (18)$$

Untuk menentukan solusi umum dari (18), misalkan $f(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari fungsi $h(x, y)$ dan $h(x', y')$, dan $g(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari fungsi $k(x, y)$ dan $k(x', y')$, dimana $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ adalah fungsi sebarang dan titik (x', y') adalah hasil rotasi dari titik (x, y) sebesar π (berlawanan arah jarum jam). Dalam hal ini dapat ditulis

$$\begin{aligned} f(x, y) &= r h(x, y) + sh(x', y'), \\ g(x, y) &= t k(x, y) + uk(x', y'), \end{aligned} \quad (19)$$

dimana r, s, t , dan u adalah bilangan riil. Dengan melakukan substitusi Persamaan (17) dan (18) ke Persamaan (19), maka diperoleh $r = -s$ dan $t = -u$. Dengan demikian Persamaan (19) menjadi

$$f(x, y) = -s h(x, y) + sh(x', y'), \quad (20)$$

$$g(x, y) = -uk(x, y) + uk(x', y'). \quad (21)$$

Selanjutnya, karena pola $p2mm$ memiliki simetri refleksi terhadap sumbu- x dan sumbu- y , maka berlaku hubungan (10) dan (11). Apabila periode simetri translasi sepanjang sumbu- x sama dengan periode simetri translasi sepanjang sumbu- y (misalkan $T = T^*$), maka hubungan (6) menjadi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x + T, y) = f(x, y + T), \\ g(x, y) &= g(x + T, y) = g(x, y + T). \end{aligned} \quad (22)$$

Berikutnya akan ditinjau pilihan yang mungkin untuk fungsi $h(x, y)$ dan $k(x, y)$. Dari hubungan (22), maka $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ haruslah fungsi periodik sepanjang sumbu- x dan sumbu- y (misalkan ditetapkan periode $T = 2\pi$). Selanjutnya asumsikan bahwa $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dua fungsi dengan variabel terpisah x dan y . Dengan demikian $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ dapat diekspresikan dalam deret Fourier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \cos ny \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos mx \sin ny, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} k(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_{mn} \sin mx \cos ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{D}_{mn} \sin mx \sin ny. \end{aligned} \quad (24)$$

Dengan menggunakan Persamaan (10) dan (11) dan beberapa manipulasi aljabar, fungsi $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ dapat disederhanakan menjadi

$$h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny,$$

$$k(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny.$$

Oleh karena itu, Persamaan (20) dan Persamaan (21) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x, y) = -s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny + s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx' \cos ny', \quad (25)$$

$$g(x, y) = -u \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny + u \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx' \sin ny'. \quad (26)$$

Lebih lanjut, dari Persamaan (17), Persamaan (25) dan (26) menjadi

$$f(x, y) = -2s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny, \quad (27)$$

$$g(x, y) = -2u \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_{mn} \cos mx \sin ny. \quad (28)$$

Persamaan (27) dan (28) memberikan kriteria bagi fungsi dinamik f dan g sedemikian sehingga potret fasa dari sistem (1) mempunyai pola simetri $p2mm$. Untuk penyederhanaan, C_{mn} dan \hat{B}_{mn} ditetapkan bernilai satu atau nol untuk suatu m dan n . Dengan demikian s dan u dapat berperan sebagai parameter amplitudo bagi fungsi dinamik f dan g .

4 Pembangkitan Pola Simetri $p2mm$

Pada bagian ini akan dibahas pembangkitan pola simetri $p2mm$ melalui simulasi numerik untuk sistem dinamik diskrit (1), dimana fungsi f dan g seperti yang diberikan masing-masing oleh Persamaan (27) dan (28). Simulasi numerik untuk pembangkitan pola simetri ini dapat menggunakan berbagai alternatif software komputasi.

Untuk pewarnaan titik (*pixel*) dilakukan dengan cara berikut [1]: setiap titik (x, y) pada suatu bidang $A \subset \mathbb{R}^2$ dijadikan sebagai titik awal (x_0, y_0) pada iterasi (1), sehingga diperoleh barisan titik $\{(x_n, y_n)\}$. Proses iterasi dijalankan sepanjang memenuhi kriteria konvergensi dalam bentuk norm Euclidian berikut:

$$\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq \varepsilon, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu toleransi galat ε , atau telah mencapai maksimum iterasi, misalkan K . Selanjutnya tetapkan warna pada titik (x, y) berdasarkan jumlah iterasi yang dihasilkan, dengan jenis warna sesuai *colormap* tertentu. Algoritma yang digunakan dalam proses iterasi ini mengikuti referensi [1] dan dapat dilihat di Lampiran.

Dalam simulasi pembangkitan pola simetri $p2mm$ ini, ditetapkan $A = [-10,10]^2$ dengan jumlah titik sebanyak 1000×700 , $\varepsilon = 0.1$, dan $K = 50$. Selanjutnya dipilih *colormap* tipe tertentu dengan melakukan pengaturan manual pada gradasi warna. Selanjutnya dipilih lima kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sebagai berikut:

- 1) $s = 0.2$, $u = -0.2$, $C_{11} = 1$, $C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 1$, $\hat{B}_{11} = 1$, $\hat{B}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 1$. Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.4 \sin x \cos y, \\ g(x, y) &= 0.4 \cos x \sin y. \end{aligned} \quad (29)$$

- 2) $s = 0.6$, $u = -0.6$, $C_{11} = 1$, $C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 1$, $\hat{B}_{11} = 1$, $\hat{B}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 1$. Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -1.2 \sin x \cos y, \\ g(x, y) &= 1.2 \cos x \sin y. \end{aligned} \quad (30)$$

- 3) $s = 0.3$, $u = -0.3$, $C_{11} = 1$, $C_{22} = 1$, $C_{mn} = 0$ untuk $m, n \neq 1$ dan $m, n \neq 2$, $\hat{B}_{11} = 1$, $\hat{B}_{22} = 1$, $\hat{B}_{mn} = 0$ untuk $m, n \neq 1$ dan $m, n \neq 2$. Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.6 \sin x \cos y - 0.6 \sin 2x \cos 2y, \\ g(x, y) &= -0.6 \cos x \sin y - 0.6 \cos 2x \sin 2y. \end{aligned} \quad (31)$$

- 4) $s = 0.2$, $u = -0.2$, $C_{11} = 1$, $C_{33} = 1$, $C_{mn} = 0$ untuk $m, n \neq 1$ dan $m, n \neq 3$, $\hat{B}_{11} = 1$, $\hat{B}_{33} = 1$, $\hat{B}_{mn} = 0$ untuk $m, n \neq 1$ dan $m, n \neq 3$. Dalam hal ini,

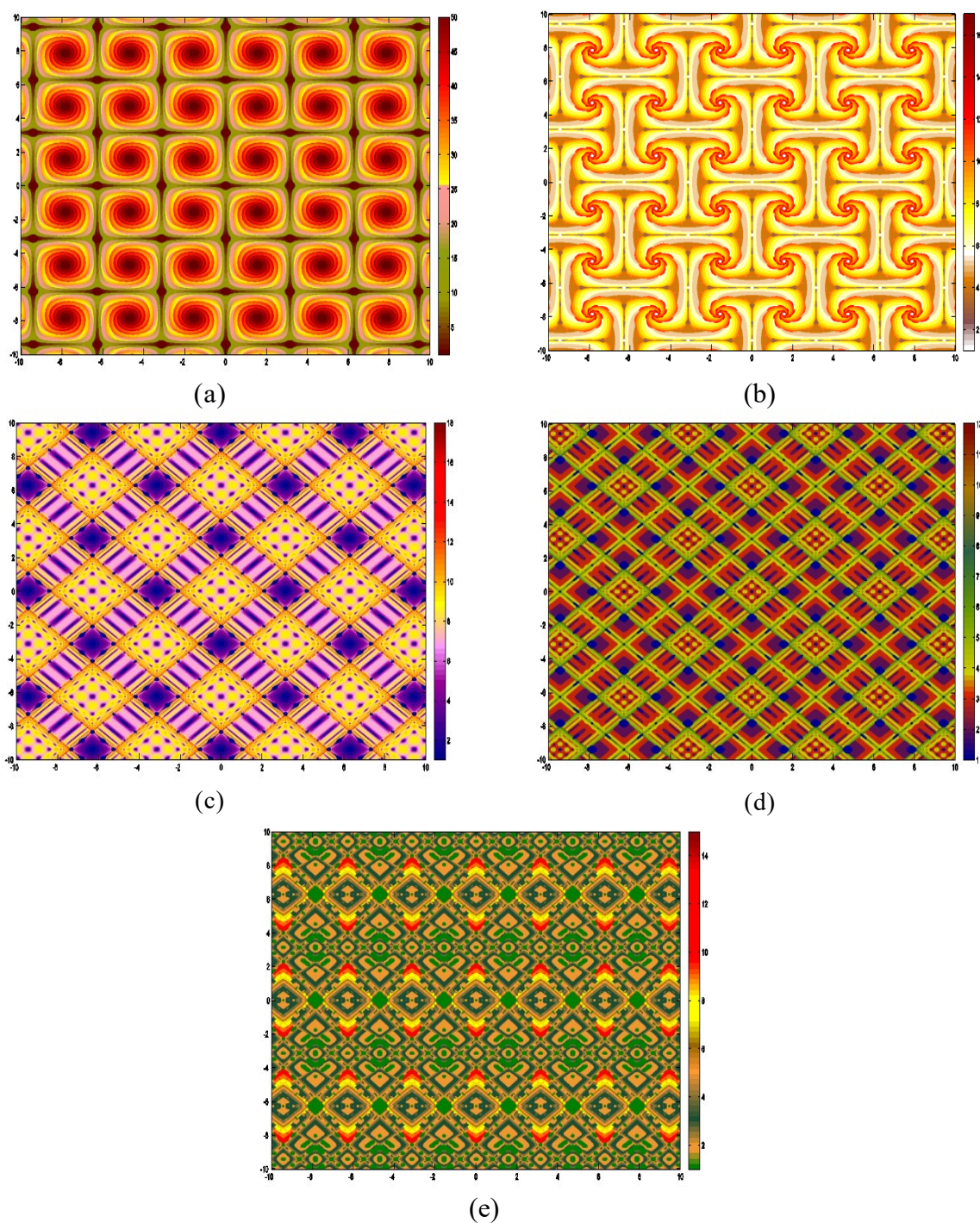
$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.4 \sin x \cos y - 0.4 \sin 3x \cos 3y, \\ g(x, y) &= -0.4 \cos x \sin y - 0.4 \cos 3x \sin 3y. \end{aligned} \quad (32)$$

- 5) $s = 0.1$, $u = -0.1$, $C_{21} = 1$, $C_{22} = 1$, $C_{44} = 1$, $C_{mn} = 0$ untuk $m \neq 2$ dan $n \neq 1$, $m, n \neq 2$ serta $m, n \neq 4$, $\hat{B}_{21} = 1$, $\hat{B}_{22} = 1$, $\hat{B}_{44} = 1$, $\hat{B}_{mn} = 0$ untuk $m \neq 2$ dan $n \neq 1$, $m, n \neq 2$ serta $m, n \neq 4$. Dalam hal ini,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -0.2 \sin 2x \cos y - 0.2 \sin 2x \cos 2y - 0.2 \sin 4x \cos 4y, \\ g(x, y) &= -0.2 \cos 2x \sin y - 0.2 \cos 2x \sin 2y - 0.2 \cos 4x \sin 4y. \end{aligned} \quad (33)$$

Hasil pembangkitan pola simetri untuk setiap fungsi f dan g di atas diberikan pada Gambar 1 yang memperlihatkan berbagai variasi pola yang menarik dan estesis. Dapat dilihat dari gambar bahwa pola-pola yang dihasilkan termasuk dalam kategori *wallpaper group* jenis

$p2mm$, yaitu memiliki kisi satuan persegi yang memenuhi simetri rotasi 180° (orde 2), simetri refleksi terhadap sumbu- x dan sumbu- y , dan simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y dengan periode 2π . Warna yang diberikan berdasarkan jumlah iterasi di setiap titik ditunjukkan pada *colorbar* dengan pengaturan gradasi warna dilakukan secara manual. Perhatikan juga bahwa nilai-nilai parameter s dan u menghasilkan beragam pola pada gambar yang dihasilkan.



Gambar 1. Hasil pembangkitan pola simetri $p2mm$ dengan f dan g pada: (a) Persamaan (29), (b) Persamaan (30), (c) Persamaan (31), (d) Persamaan (32) dan (e) Persamaan (33).

5 Simpulan

Dalam artikel ini telah dibahas pembangkitan pola simetri $p2mm$ berwarna melalui sebuah simulasi sistem dinamik diskrit. Untuk menentukan fungsi-fungsi dinamik yang memenuhi sifat-sifat pola $p2mm$, terlebih dahulu dilakukan analisis terhadap syarat-syarat isometri yang berlaku. Dari hasil analisis diperoleh takhingga banyaknya pilihan fungsi dinamik dalam bentuk fungsi trigonometri sedemikian sehingga potret fasa sistem memenuhi pola simetri $p2mm$. Dengan memilih lima kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi dinamik dan melakukan pengaturan manual terhadap gradasi warna *colormap*, diperoleh pola-pola $p2mm$ berwarna yang lebih variatif, menarik dan estetis. Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk *wallpaper group* jenis lain agar didapatkan pola-pola simetri yang lebih beragam.

6 Daftar Pustaka

- [1] K. W. Chung and H. S. Y. Chan, "Symmetrical Patterns from Dynamics," *Computer Graphics Forum*, vol. 12, no. 1, pp. 33–40, 1993, doi: <https://doi.org/10.1111/1467-8659.1210033>.
- [2] K. W. Chung and H. S. Y. Chan, "Spherical symmetries from dynamics," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 29, no. 7, pp. 67–81, 1995, doi: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(95\)00019-U](https://doi.org/10.1016/0898-1221(95)00019-U).
- [3] J. Lu, Z. Ye, and Y. Zou, "Automatic generation of colorful patterns with wallpaper symmetries from dynamics," *Vis Comput*, vol. 23, no. 6, pp. 445–449, 2007, doi: [10.1007/s00371-007-0116-9](https://doi.org/10.1007/s00371-007-0116-9).
- [4] P. Ouyang, W. Zhao, and X. Huang, "Beautiful Math, Part 5: Colorful Archimedean Tilings from Dynamical Systems," *IEEE Comput Graph Appl*, vol. 35, no. 6, pp. 90–96, 2015, doi: [10.1109/MCG.2015.135](https://doi.org/10.1109/MCG.2015.135).
- [5] Ashish, M. Rani, and R. Chugh, "Julia sets and Mandelbrot sets in Noor orbit," *Appl Math Comput*, vol. 228, pp. 615–631, 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.077>.
- [6] S. M. Kang, A. Rafiq, A. Latif, A. A. Shahid, and Y. C. Kwun, "Tricorns and Multicorns of S -Iteration Scheme," *Journal of Function Spaces*, vol. 2015, pp. 1–7, 2015, doi: [10.1155/2015/417167](https://doi.org/10.1155/2015/417167).
- [7] S. M. Kang, H. H. Alsulami, A. Rafiq, and A. A. Shahid, "S-iteration scheme and polynomiography," *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 8, no. 5, pp. 617–627, 2015, doi: [10.22436/jnsa.008.05.14](https://doi.org/10.22436/jnsa.008.05.14).

- [8] K. Gdawiec, W. Kotarski, and A. Lisowska, “Polynomiography Based on the Nonstandard Newton-Like Root Finding Methods,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2015, pp. 1–19, 2015, doi: 10.1155/2015/797594.
- [9] K. Gdawiec, “Procedural generation of aesthetic patterns from dynamics and iteration processes,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 27, no. 4, pp. 827–837, 2017, doi: doi:10.1515/amcs-2017-0058.
- [10] M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*. New York: Springer, 1988.
- [11] A. D. Garnadi, S. Guritman, A. Kusananto, and F. Hanum, “Survei Pola Grup Kristalografi Bidang Ragam Batik Tradisional,” *JMA*, vol. 11, no. 2, pp. 1–19, 2012.
- [12] K. F. Cania, M. Syafwan, and S. Bahri, “Pembangkitan Pola Simetri Rotasi 90° dari Simulasi Sistem Dinamik,” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 10, no. 1, pp. 20–28, 2021, doi: <https://doi.org/10.25077/jmu.10.1.20-28.2021>.

Lampiran. Algoritma

Input :

nx, ny (tingkat resolusi gambar dalam arah x dan arah y)

$xmin, xmax$ (nilai x minimum dan maksimum dalam bidang gambar D)

$ymin, ymax$ (nilai y minimum dan maksimum dalam bidang gambar D)

K (jumlah iterasi maksimum)

ϵ (galat)

s, u, m, n (nilai – nilai parameter pada fungsi f dan g)

Output : Pola Simetri pada bidang D

Langkah-langkah :

- 1: Untuk $iy \leftarrow 0$ hingga $(ny - 1)$
- 2: $cy \leftarrow ymin + iy * (ymax - ymin)/(ny - 1)$;
- 3: for $ix \leftarrow 0$ to $(nx - 1)$
- 4: $cx = xmin + ix * (xmax - xmin)/(nx - 1)$;
- 5: $x = cx$; $y = cy$;
- 6: for $iw \leftarrow -1$ to K
 - 7: $x1 = (-x)$;
 - 8: $y1 = (-y)$;
 - 9: $hxy = \sin(m * x) * \cos(n * y)$;
 - 10: $h1xy = \sin(m * x1) * \cos(n * y1)$;
 - 11: $fxy = -s * hxy + s * h1xy$;
 - 12: $kxy = \cos(m * x) * \sin(n * y)$;
 - 13: $k1xy = \cos(m * x1) * \sin(n * y1)$;
 - 14: $gxy = -u * kxy + u * k1xy$;
 - 15: $t = \sqrt{(fxy * fxy) + (gxy * gxy)}$; (Tes Euclidean)
 - 16: Jika $t < \epsilon$ maka lanjut ke langkah 19
 - 17: $x \leftarrow x + fxy, y \leftarrow y + gxy$
- 18: end iw
- 19: Plot titik (cx, xy) dengan warna yang ditentukan i
- 20: end ix
- 21: end iy