Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 1, Mei 2022, 123-133
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i1.8114

Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya

Haryadi[1], Burhanudin Arif Nurnugroho [2]
[1]Departemen Ilmu Komputer; Universitas Muhammadiyah Palangkaraya Indonesia
[2]Departemen Pendidikan Matematika; Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta Indonesia
e-mail: [1]haryadi_ump@yahoo.co.id, [2]burhanudin@pmat.uad.ac.id

Diajukan: 3 Desember 2020, Diperbaiki: 27 September 2021, Diterima: 12 Januari 2022

Abstrak

Di dalam makalah ini akan dikaji sifat-sifat ruang barisan Orlicz ℓ_ϕ. Selanjutnya, akan diselidiki karakteristik ruang dual ruang barisan Orlicz dan keterkaitannya dengan ruang barisan yang dibangun oleh pasangan fungsi Orlicz komplementernya. Untuk mencapai tujuan tersebut pada ruang barisan Orlicz ℓ_ϕ akan digunakan norma Luxemburg dan norma-ϕ. Dengan menggunakan kedua norma, karakterisasi ruang barisan Orlicz berhasil ditelaah. Hasil-hasil yang lebih khusus ditelaah untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi-Δ_2. Secara umum, ruang dual ruang barisan Orlicz merupakan himpuan bagian ruang barisan yang dibangun oleh pasangan fungsi Orlicz komplementernya. Lebih lanjut, untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi-Δ_2, ruang dual ruang barisan Orlicz merupakan perumuman di ruang barisan l_p dengan $1 < p < \infty$.

Kata Kunci: fungsi Orlicz, ruang barisan, ruang dual.

Abstract

In this paper first, we examine some properties of the sequence Orlicz space ℓ_ϕ. Then, we examined the characteristics of the dual space of the sequence space. The relation of the dual space and the sequence generated by its complementary Orlicz function are examined. We use the Luxemburg norm and the ϕ-norm to investigate the space. Some properties of the space are found, and the results for the Orlicz function that satisfies Δ_2-condition are given. Generally, the dual space is the subspace of the sequence generated by its complementary Orlicz function. For the Orlicz function that satisfies Δ_2-condition, the dual space is generalization of the dual in the space l_p for $1 < p < \infty$.

Keywords: *dual space, Orlicz function, sequence space,.*

1 Pendahuluan

Generalisasi ruang barisan $\ell_p, 1 < p < \infty$ ke ruang barisan Orlicz selain telah mendorong dilakukan berbagai cara pengkonstruksian juga telah mendorong berbagai topik penelitian lainnta pada ruang barisan Orlicz. Beberapa cara pengkonstruksian ruang barisan dengan menggunakan fungsi Orlicz dikaji di dalam [1], [2], [3] dan [4]. Di dalam [5], Khusnussa'adah dan Supama meneliti sifat kelengkapan modular dan kelengkapan norma pada ruang barisan Orlicz .

Untuk $1 < \mathrm{p} < \infty$ telah diketahui bahwa ruang dual $\ell_p, 1 < p < \infty$ adalah ℓ_q dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pengkarakterisasian dual Kothe-Toeplitz pada ruang barisan yang dibangkitkan oleh fungsi

Orlicz dikaji di dalam [1], [6], [7] dan [8]. Bentuk umum fungsional linear pada ruang barisan Orlicz ditelaah beberapa peneliti. Di dalam [9], Nowak mengkarakterisasi dual Kothe-Toeplitz pada ruang barisan yang dibangun oleh fungsi Orlicz dengan menghilangkan kondisi kekonveksan dan menggunakan pendekatan fungsional Minkowski untuk mengkontruksi norma.

Di dalam makalah ini akan dikaji sifat-sifat ruang barisan Orlicz dan karakterisasi ruang dualnya. Lebih lanjut, akan dikaji hubungan antara dual ruang barisan Orlcz dengan ruang barisan yang dikonstruksi oleh fungsi Orlicz komplementernya.

2. Metode Penelitian

Di dalam makalah ini fungsi Orlicz yang digunakan untuk membentuk barisan Orlicz merupakan fungsi konveks. Untuk menelaah sifat-sifat ruang barisan Orlicz, terlebih dahulu akan dikaji materi-materi dasar mengenai fungsi Orlicz. Pada ruang barisan Orlicz terlebih dahulu dikonstruksi modular untuk mengkonstruksi norma Luxemburg. Agar pembahasan dapat dilakukan lebih leluasa, pada ruang barisan Orlicz juga dikonstruksi norma-ϕ. Dengan menggunakan kedua norma tersebut, selanjutnya dikaji sifat-sifat ruang barisan Orlicz. Sifat-sifat pada ruang barisan Orlicz yang telah diperoleh pada tahapan sebelumnya, selanjutnya digunakan untuk mengkaji ruang dual ruang barisan Orlicz dan keterkaitan dengan ruang barisan Orlicz yang dibangun oleh pasangan fungsi Orlicz kompelementernya. Secara lebih khusus dikaji sifat ruang barisan Orlicz dan karakterisasi ruang dualnya untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi-Δ_2.

3. Hasil dan Pembahasan

Uraian mengenai fungsi Orlicz berikut dapat diacu di dalam [10]. Fungsi Orlicz dituliskan dengan ϕ, yaitu $\phi: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, dengan ϕ fungsi genap, kontinu, konveks, $\phi(t) = 0$ jika dan hanya jika $t = 0$ dan $lim_{t\to\infty}\phi(t) = \infty$. Setiap fungsi Orlicz ϕ dapat dinyatakan dengan

$$\phi(t) = \int_0^t p(s)ds \tag{1}$$

dengan p fungsi tidak turun dan kontinu kanan. Untuk sebarang fungsi Orlicz ϕ, fungsi ψ dengan definisi $\psi(s) = sup\,\{|s|t - \phi(t): t \geq 0\}$ merupakan fungsi Orlicz. Selanjutnya ϕ dan ψ dinamakan pasangan fungsi Orlicz komplementer. Jika ϕ dan ψ pasangan fungsi Orlicz komplementer maka berlaku ketaksamaan Young, yakni $|ts| \leq \phi(t) + \psi(s)$ untuk setiap $t, s \in \mathbb{R}$. Ketaksamaan Young menjadi kesamaan jika $s = p(|t|)$ atau $t = q(|s|)$ dengan p (atau q) fungsi tidak turun dan kontinu kanan yang memenuhi persamaan (1)$\phi(t) = \int_0^t p(s)ds$

(1.

Fungsi Orlicz ϕ dikatakan memenuhi kondisi-Δ_2 jika terdapat konstanta K dan bilangan $c \geq 0$ sehingga $\phi(2t) \leq K\phi(t)$ untuk setiap $t \geq c$. Kondisi-Δ_2 juga ekuivalen dengan terdapat bilangan $K(\lambda) > 0$ sehingga $\phi(\lambda x) \leq K(\lambda)\phi(x)$ dengan $\lambda > 1$. Perlu diketahui bahwa jika fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 maka fungsi Orlicz komplementernya belum tentu memenuhi kondisi- Δ_2.

Contoh 1. (i) Fungsi ϕ_1 dengan $\phi_1(t) = |t|^\alpha(|\ln|t|| + 1)$ dengan $\alpha > 1$ merupakan fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi -Δ_2

(ii) Fungsi ϕ_2 dengan $\phi_2(t) = e^{|t|} - 1$ merupakan fungsi Orlicz yang tidak memenuhi kondisi-Δ_2, sebab

$$\phi_2(2t) = e^{|2t|} - 1 = \left(e^{|t|} + 1\right)\left(e^{|t|} - 1\right) = \left(e^{|t|} + 1\right)\phi_2(t),$$

yang berakibat untuk sebarang $K > 0$ dapat diambil $t \geq 0$ dengan $K < e^{|t|} + 1$, sehingga

$$K\phi_2(t) < \left(e^{|t|} + 1\right)\phi_2(t) = \phi_2(2t).$$

3.1. Beberapa sifat ruang barisan Orlicz

Diberikan himpunan semua barisan bilangan real ω. Anggota ω dituliskan dengan $x = (x_k) = (x_1, x_2, \cdots)$. Untuk sebarang fungsi Orlicz ϕ dapat ditunjukkan bahwa

$$\ell_\phi = \left\{(x_k): \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) < \infty, \qquad untuk\ suatu\ \lambda > 0\right\}$$

merupakan ruang barisan dan selanjutnya dinamakan ruang barisan Orlicz. Salah satu himpunan bagian ℓ_ϕ adalah himpunan barisan

$$\ell_\phi^0 = \left\{(x_k): \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty\right\}.$$

Untuk fungsi Orlicz $\phi(t) = |t|^p, 1 < p < \infty$, maka ruang barisan Orlicznya adalah $\ell_p = \{(x_k): \sum_k |x_k|^p < \infty\}$.

Lemma 1 Jika fungsi Orlicz ϕ tidak memenuhi kondisi-Δ_2 maka ℓ_ϕ^0 bukan ruang linear. Lebih lanjut, ℓ_ϕ^0 himpunan bagian sejati ℓ_ϕ.

Bukti. Karena ϕ tidak memenuhi kondisi-Δ_2, maka untuk setiap bilangan asli k terdapat bilangan t_k sehingga $\phi(2t_k) > 2^k\phi(t_k)$. Dibentuk barisan (s_k) dengan

$$s_k = \begin{cases} t_k, & jika\ \dfrac{1}{2^k} < \phi(t_k) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}} \\ 0, & untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Barisan $(s_k) \in \ell_\phi^0$, sebab

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(s_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty.$$

Sementara itu barisan $(2s_k)$ bukan anggota ℓ_ϕ^0, sebab

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(2s_k) > \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \phi(s_k) = \infty.$$

Jelas bahwa $(2s_k) \in \ell_\phi$, sebab ℓ_ϕ ruang linear. Dengan demikian lemma terbukti.

Fungsi Orlicz bersifat konveks, oleh karena itu fungsi $\rho_\phi : \ell_\phi \to [0, \infty]$ dengan definisi

$$\rho_\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k)\,, \quad x = (x_k) \in \ell_\phi$$

merupakan modular konveks, yakni

(1) $\rho_\phi(x) = 0$, jika dan hanya jika $x = \theta$, dengan $\theta = (0,0, \dots.)$,

(2) $\rho_\phi(-x) = \rho_\phi(x)$ untuk setiap $x \in \ell_\phi$, dan

(3) $\rho_\phi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho_\phi(x) + \beta \rho_\phi(y)$ untuk setiap $x, y \in \ell_\phi$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$.

Sifat konveks dan $\phi(0) = 0$ mengakibatkan ϕ naik monoton pada interval $[0, \infty)$. Oleh karena itu ρ_ϕ bersifat naik monoton pada interval $[0, \infty)$.

Selanjutnya, karena ρ_ϕ merupakan modular konveks, maka dapat didefinisikan norma Luxemburg pada ℓ_ϕ, yaitu

$$\|(x_k)\|_{(\phi)} = inf \left\{ u: > 0: \rho_\phi \left(\frac{(x_k)}{u} \right) \leq 1 \right\}.$$

Berdasarkan definisi norma Luxemburg dan sifat monoton naik ρ_ϕ, untuk sebarang $\epsilon > 0$ berlaku $\rho_\phi \left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_{(\phi)} + \epsilon} \right) \leq 1$. Oleh karena itu diperoleh hasil

$$\rho_\phi \left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_{(\phi)}} \right) \leq 1 \tag{2}$$

Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ϕ dan ψ. Selain norma Luxemburg, pada ruang ℓ_ϕ juga bisa didefinisikan norma-ϕ

$$\|(x_k)\|_\phi = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right|, \quad (x_k) \in \ell_\phi$$

Di dalam ruang ℓ_p, $1 < p < \infty$ hubungan antara norma-ϕ dengan norma-p,

$$\|(x_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

diilustrasikan di dalam contoh berikut.

Contoh 2. Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer $\phi(x) = \frac{|x|^2}{2}$ dan $\psi(y) = \frac{|y|^2}{2}$. Misalkan $x = (x_k) \in \ell_\phi$ dengan $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2)^{1/2} = 1$. Untuk $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|y_k|^2}{2} \leq 1$ ketaksamaan Holder memberikan

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|y_k|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}$$

sehingga berakibat itu $\|x\|_\phi \leq \sqrt{2}$. Selanjutnya didefinisikan barisan (a_k) dengan $a_k = \sqrt{2}|x_k|\ sgn(x_k)$. Karena

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\sqrt{2}|x_k|\ sgn(x_k)\right|^2}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 = 1,$$

maka

$$\|x\|_\phi \geq \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\sqrt{2}|x_k|\ sgn(x_k)\right| = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 = \sqrt{2}.$$

Dengan demikian diperoleh $\|x\|_\phi = \sqrt{2}$.

Selanjutnya, untuk sebarang $x = (x_k) \in \ell_\phi$ dengan $x \neq 0$, mengingat $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = 1$, dengan menggunakan hasil terakhir $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_\phi = \sqrt{2}$. Oleh karena itu $\|x\|_\phi = \sqrt{2}\ \|x\|_2$.

Lemma 2 Diberikan barisan $(x_k) \in \ell_\phi$.

(i) Jika $\|(x_k)\|_\phi \leq 1$ maka $\rho_\phi\big((x_k)\big) \leq \|(x_k)\|_\phi$,

(ii) Jika $\|(x_k)\|_\phi > 1$ maka $\rho_\phi\big((x_k)\big) \geq \|(x_k)\|_\phi$.

Bukti. (i) Karena $\|(x_k)\|_\phi \leq 1$, kekonveksan ϕ berakibat

$$\frac{1}{\|(x_k)\|_\phi}\sum_{k=1}^{\infty}\phi(x_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(\frac{x_k}{\|(x_k)\|_\phi}\right) \leq 1.$$

Oleh karena itu $\rho_\phi\big((x_k)\big) \leq \|(x_k)\|_\phi$.

(ii) Untuk $\|(x_k)\|_\phi > 1$ diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ sehingga $\|(x_k)\| - \epsilon \geq 1$. Karena $\|(x_k)\| - \epsilon < \|(x_k)\|$, maka berdasarkan definisi norma Luxemburg

$$1 < \rho_\phi\left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\| - \epsilon}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(\frac{x_k}{\|(x_k)\| - \epsilon}\right) \leq \frac{1}{\|(x_k)\| - \epsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\phi(x_k),$$

sehingga lemma terbukti.

Lemma 3 Untuk sebarang $x = (x_k) \in \ell_\phi$ berlaku $\|(x_k)\|_\phi \le \rho_\phi\big((x_k)\big) + 1$.

Bukti. Karena $|x_k y_k| \le \phi(x_k) + \psi(y_k)$ untuk setiap bilangan asli k, maka

$$\|(x_k)\|_\phi = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k)\le 1}\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\phi(x_k) + \sup_{\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k)\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}\psi(y_k) \le \rho_\phi\big((x_k)\big) + 1.$$

Di dalam teorema berikut dinyatakan bahwa norma Luxemburg dan norma-ϕ ekuivalen.

Teorema 4 Untuk setiap barisan $(x_k) \in \ell_\phi$, berlaku

$$\|(x_k)\|_{(\phi)} \le \|(x_k)\|_\phi \le 2\|(x_k)\|_{(\phi)}.$$

Bukti. Diambil sebarang $x = (x_k) \in \ell_\phi$ dengan $x \ne \theta$. Karena $\left\|\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_\phi}\right\|_\phi \le 1$, maka berdasarkan Lemma 2(i), $\rho_\phi\left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_\phi}\right) \le 1$. Oleh karena itu

$$\|(x_k)\|_{(\phi)} = inf\left\{u > 0 \colon \rho_\phi\left(\frac{(x_k)}{u}\right) \le 1\right\} \le \|(x_k)\|_\phi,$$

Sehingga ketaksamaan pertama terbukti. Selanjutnya dengan menerapkan berturut-turut Lemma 3 dan ketaksamaan $\rho_\phi\left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_{(\phi)}}\right) \le 1$ (2),

$$\left\|\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_{(\phi)}}\right\|_\phi \le \rho_\phi\left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|_{(\phi)}}\right) + 1 \le 2,$$

sehingga ketaksamaan kedua terbukti.

Teorema 5 [Ketaksamaan Holder] Jika ϕ dan ψ pasangan fungsi Orlicz komplementer, maka untuk setiap $x = (x_k) \in \ell_\phi$ dan $y = (y_k) \in \ell_\psi$ berlaku

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \|x\|_\phi \|y\|_\psi.$$

Bukti. Diasumsikan $(x_k) \ne \theta$ dan $(y_k) \ne \theta$. Karena $\left\|\frac{(y_k)}{\|y\|_\psi}\right\|_\psi \le 1$, maka berdasarkan Lemma 2 (i), $\rho_\psi\left(\frac{(y_k)}{\|y\|_\psi}\right) \le 1$. Oleh karena itu

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{y_k}{\|y\|_\psi}\right| \le \sup_{\sum_{k=1}^{\infty}\psi(z_k)\le 1}\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k\right| = \|x\|_\phi$$

sehingga ketaksamaan tersebut terbukti.

Lemma 6 Jika $\ell_{\phi_1} \subseteq \ell_{\phi_2}$ maka ada konstanta c dan $x_0 \ge 0$ sehingga $\phi_2(x) \le c\phi_1(x)$ untuk setiap $x \ge x_0$.

Bukti. Diandaikan pernyataan tersebut tidak benar. Jadi untuk setiap bilangan asli k dan $x_k > 0$ dapat dipilih bilangan $t_k \ge x_k$ sehingga

$$\phi_2(t_k) > 2^k \phi_1(t_k).$$

Dibentuk barisan (s_k) dengan $s_k = t_k$ jika $2^{-k} \leq \phi_1(t_k) < 2^{-k+1}$ dan $s_k = 0$ untuk nilai t_k lainnya. Barisan $(s_k) \in \ell_{\phi_1}$ sebab

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_1(s_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} < \infty.$$

Sementara itu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_2(s_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \phi_1(s_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k} = \infty,$$

yakni $(s_k) \notin \ell_{\phi_2}$. Dengan demikian tidak benar bahwa $\ell_{\phi_1} \subseteq \ell_{\phi_2}$, kontradiksi dengan yang diketahui.

Teorema 7 Ruang barisan Orlicz $\ell_\phi = \ell_\phi^0$ jika dan hanya jika ϕ memenuhi kondisi-Δ_2.

Bukti. Diketahui ϕ memenuhi kondisi-Δ_2. Karena $\ell_\phi^0 \subseteq \ell_\phi$ maka cukup dibuktikan bahwa $\ell_\phi \subseteq \ell_\phi^0$. Diambil sebarang $(x_k) \in \ell_\phi$, jadi terdapat $\lambda > 0$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) < \infty$. Jika $\lambda \leq 1$, sifat monoton naik ϕ mengakibatkan $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{x_k}{\lambda}\right)$ yang berarti $(x_k) \in \ell_\phi^0$. Jika $\lambda > 1$ diambil bilangan $K > 0$ sehingga $\phi(\lambda t) \leq K(\lambda)\phi(t)$. Diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{\lambda x_k}{\lambda}\right) \leq K(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) < \infty.$$

Dengan demikian $\ell_\phi \subseteq \ell_\phi^0$.

Sebaliknya, diketahui $\ell_\phi = \ell_\phi^0$. Diambil sebarang $x = (x_k) \in \ell_\phi^0$. Karena ℓ_ϕ^0 ruang linear, maka $2x \in \ell_\phi^0$. Didefinisikan fungsi Orlicz ϕ_1 dengan $\phi_1(t) = \phi(2t)$. Karena $\phi(t) \leq \phi_1(t)$ maka $\ell_{\phi_1} \subseteq \ell_\phi$, sehingga berdasarkan Lemma 6, terdapat bilangan $c > 0$ sehingga $\phi(2t) = \phi_1(t) \leq c\phi(t)$, yang berarti ϕ memenuhi kondisi-Δ_2.

Teorema 8 Ruang ℓ_ϕ merupakan ruang normal.

Bukti. Diambil sebarang $(x_k) \in \ell_\phi$, yakni $\sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) < \infty$ untuk suatu $\lambda > 0$. Diambil barisan (y_k) sehingga $|y_k| < |x_k|$, $k = 1,2,3,\cdots$. Sifat monoton tidak turun fungsi ϕ mengakibatkan $\sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{y_k}{\lambda}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{x_k}{\lambda}\right) < \infty$, yang berarti $(y_k) \in \ell_\phi$. Oleh karena itu ℓ_ϕ merupakan ruang normal.

3.2. Ruang dual ℓ_ϕ

Selanjunya akan dikaji ruang dual ruang barisan Orlicz. Notasi ℓ_ϕ' menyatakan ruang linear yang anggotanya semua fungsional linear kontinu pada ℓ_ϕ. Untuk pembahasan selanjutnya didefinisikan norma $\|\cdot\|$ pada ℓ_ϕ' dengan

$$\|f\| = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_i y_i\right| : \|x\|_\phi \le 1\right\}, \qquad \text{untuk setiap } f \in {\ell_\phi}'$$

Teorema 9 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ϕ dan ψ. Jika $(y_k) \in \ell_\psi$ maka fungsi f_y dengan

$$f_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_i y_i, \quad \text{untuk setiap } (x_k) \in \ell_\phi$$

merupakan fungsional linear pada ℓ_ϕ. Lebih lanjut

$$\|f_y\| \le \|y\|_\psi \le 2\|f_y\| \tag{3}$$

Bukti. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa f_y merupakan fungsional linear kontinu. Diambil sebarang $x = (x_k), z = (z_k) \in \ell_\phi$ dan sebarang bilangan real α. Karena $x \in \ell_\phi$ dan $y \in \ell_\psi$ maka

$$|f_y(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_i y_i\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_i) < \infty,$$

yakni f_y terbatas. Linieritas f_y diperoleh dari $f_y(\alpha x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_i)y_i = \alpha f_y(x)$ dan $f_y(x+z) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_i + z_i)y_i = f_y(x) + f_y(z)$.

Ketaksamaan pertama didalam (3) diperoleh dengan menerapkan ketaksamaan Holder. Selanjutnya, karena $\|x\|_\phi \le \rho_\phi(x) + 1$, maka $\{x: \rho_\phi(x) \le 1\} \subseteq \{x: \|x\|_\phi \le 2\}$. Oleh karena itu

$$\|y\|_\psi = sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_i y_i\right| : \rho_\phi(x) \le 1\right\} \le sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_i y_i\right| : \|x\|_\phi \le 2\right\} \le \|x\|_\phi \|f_y\| \le 2\|f_y\|.$$

Oleh karena ketaksamaan kedua didalam (3) terbukti.

Contoh 3. Diberikan fungsi Orlicz $\phi(x) = \frac{|x|^2}{2}$. Fungsi ψ dengan $\psi(y) = \frac{|y|^2}{2}$ merupakan fungsi Orlicz komplementer ϕ. Berdasarkan Contoh 2, $\|y\|_\psi = \sqrt{2}\|y\|_2$. Lebih lanjut,

$$\|f_y\| = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_i y_i\right| : \|x\|_\phi \le 1\right\} \le \sup\{\|x\|_\phi \|y\|_\psi : \|x\|_\phi \le 1\} \le \|y\|_\psi = \sqrt{2}\|y\|_2.$$

Oleh karena itu $\|f_y\| \le 2\|y\|_2$.

Dual-α dan dual-β ruang barisan ℓ_ϕ dituliskan berturut-turut ${\ell_\phi}^\alpha$ dan ${\ell_\phi}^\beta$, yaitu

$${\ell_\phi}^\alpha = \left\{(x_k) \in \omega: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty \ \mathit{untuk\ setiap}\ (y_k) \in \ell_\phi\right\}$$

$${\ell_\phi}^\beta = \left\{(x_k) \in \omega: \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \ \mathit{konvergen\ untuk\ setiap}\ (y_k) \in \ell_\phi\right\}$$

Teorema-teorema berikut merupakan hasil kajian mengenai dual-α dan dual-β ruang barisan ℓ_ϕ, yang merupakan generalisasi dual-α dan dual-β ruang barisan $\ell_p, 1 < p < \infty$.

Teorema 10 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ϕ dan ψ. Jika fungsi Orlicz ϕ tidak memenuhi kondisi-Δ_2, maka $\ell_\psi \subset \ell_\phi^\beta$.

Bukti. Diketahui ϕ tidak memenuhi kondisi-Δ_2. Berdasarkan Lemma 1 ada barisan $a = (a_k) \in \ell_\phi \backslash \ell_\phi^0$, yakni $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(a_k) = \infty$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{a_k}{\lambda}\right) < \infty$ untuk suatu $\lambda > 1$. Didefinisikan fungsional linear f dengan $f(a) = 1$ dan $f(x) = 0$ jika $x \in \ell_\phi^0$. Berdasarkan Teorema Hahn-Banach, fungsional f dapat diperluas pada ℓ_ϕ, yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & jika\ x \in \ell_\phi \backslash \ell_\phi^0 \\ 0, & jika\ x \in \ell_\phi^0. \end{cases}$$

Dimisalkan f dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

untuk suatu $y = (y_k) \in \ell_\psi$. Didefinisikan barisan $y^{[m]} = (y_1, y_2, \cdots, y_m, 0,0, \cdots)$.

Karena $y^{[m]} \in \ell_\phi^0$ maka $f(y^{[m]}) = 0$ untuk setiap $m = 1,2,\cdots$, yakni

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{[m]} y_k = \sum_{k=1}^{m} y_k^2, \qquad m = 1,2,\cdots.$$

Oleh karena itu $y_k = 0$ untuk setiap $k = 1,2,\cdots$. Akibatnya $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = 0$ untuk setiap $x \in \ell_\phi \backslash \ell_\phi^0$. Hal tersebut kontradiksi dengan kenyataan bahwa $f(a) = 1$.

Teorema 11 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ϕ dan ψ. Jika ϕ memenuhi kondisi -Δ_2 maka ${\ell_\phi}^\alpha = \ell_\psi$.

Bukti. Diberikan $(y_k) \in \ell_\psi$, yakni sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k/\lambda) < \infty$ untuk suatu $\lambda > 0$. Diambil sebarang $(x_k) \in \ell_\phi$. Kondisi -Δ_2 mengakibatkan $\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty$. Akibatnya

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k/\lambda) < \infty.$$

Oleh karena itu $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty$, yang berarti $(y_k) \in \ell_\phi^\alpha$.

Sebaliknya, diambil sebarang $(y_k) \in {\ell_\phi}^\alpha$ dan sebarang bilangan asli n. Didefinisikan barisan (x_k) dengan $x_k = q(|y_k|)$ untuk setiap $1 \leq k \leq n$ dan $x_k = 0$ untuk $k > n$. Barisan $(x_k) \in \ell_\phi$, sehingga berakibat $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty$. Dengan mengenakan kesamaan Young

$$\sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) + \sum_{k=1}^{n} \psi(y_k) = \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|,$$

yang berakibat $\sum_{k=1}^{n} \psi(y_k) < \infty$, yakni $(y_k) \in \ell_\psi$.

Teorema 12 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ϕ dan ψ. Jika ϕ memenuhi kondisi -Δ_2 maka ${\ell_\phi}^\beta = \ell_\psi$.

Bukti. Karena ℓ_ϕ ruang normal, maka $\ell_\phi^\beta = \ell_\phi^\alpha$. Selanjutnya karena ϕ memenuhi kondisi-Δ_2, maka berdasarkan Teorema 11, ${\ell_\phi}^\alpha = \ell_\psi$. Oleh karena itu diperoleh ${\ell_\phi}^\beta = \ell_\psi$.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil di atas, dapat disimpulkan hal-hal berikut:

(i) Secara umum untuk sebararang pasangan fungsi Orlicz komplementer ϕ dan ψ, berlaku $\ell_\psi \subset {\ell_\phi}'$.

(ii) Untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi-Δ_2, dual Kothe-Toeplitz ruang barisan Orlicz merupakan generalisasi dual Kothe-Toeplitz ruang barisan ℓ_p, dengan $1 < p < \infty$.

(iii) Setelah ruang dual diketahui, kemungkinan selanjutnya yang dapat diteliti adalah karakterisasi matriks tak hingga yang memetakan ruang barisan Orlicz ke ruang barisan lainnya.

5 Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada reviewer yang telah memeriksa artikel ini sehingga sangat bermanfaat untuk perbaikan.

6 Daftar Pustaka

[1] K.P. Rahman dan R.A.B.M. Karim, "Weighted Cesaro sequence space and related matrix tranformation," *Pure and Applied Mathematics Journal,* pp. 237-241, 2015.

[2] V.K. Bhardwaj dan S. Gupta, "Cesaro summable difference sequence space," *Journal of Inequalities and Applications.*

[3] I. Bala, "On Cesaro Sequence Space defined by an Orlicz Function," *Communications in Mathematics and Applications,* vol. 3, no. 2, pp. 197-204, 2012.

[4] H. Dutta, I.H. Jebril, B.S. Reddy, dan S. Ravikumar, "A Generalization of Modular Sequence Spaces by Cesaro Mean of Order One," *Revista Notas de Matematica,* vol. 7, no. 1, pp. 1-13, 2011.

[5] N. Khusnussa'adah dan Supama, "Kelengkapan Ruang Barisan yang terdefinisi oleh Fungsi Orlicz," *Eksakta: Jurnal Ilmu-ilmu MIPA,* vol. 19, no. 1, pp. 1-14, 2019.

[6] Haryadi, Supama dan A. Zulijanto, "The The beta-dual of the Cessaro sequence spaces defined on a generalized Orlicz space," in *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 893*, Denpasar, 2017.

[7] K. Raj, R. Anand, R. dan S. Pandoh, "Cesaro Orlicz Sequence Space and Their Kothe-Toeplitz Duals," *Math. J. Okayama Univ.,* vol. 61, pp. 141-158, 2019.

[8] N. Subramanian, S. Krishnamoorthy dan S. Balasubramanian, "The Matrix Transformation on Orlicz Space of X," *Acta Universitatis Apulensis,* vol. 32, pp. 7-15, 2012.

[9] M. Nowak, "Linear Functional on Orlicz Sequences Spaces without Local Convexity," *Internat, J. Math. & Math. Sci,* vol. 15, no. 2, pp. 241-254, 1992.

[10] M.A. Krasnosel'skii dan Y.B. Rutickii, Covex Function and Orlicz Space, Netherlands: P. Noordhoff Ltd., 1961.