Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 2, Nopember 2022, 145-154
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i2.8298

Barisan Aritmetika Bertingkat dengan Menggunakan Interpolasi Lagrange

Heri Purnawan [1], Subiono [2]
[1,2] Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia
[1] Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Islam Lamongan, Lamongan, Indonesia
e-mail: [1]heripurnawan@unisla.ac.id, [2]subiono2008@matematika.its.ac.id

Diajukan: 31 Desember 2020, Diperbaiki: 14 Juni 2022, Diterima: 4 September 2022

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang suatu cara yang belum pernah digunakan untuk mengkonstruksi rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat menggunakan interpolasi Lagrange. Rumus yang telah didapat bisa dimanfaatkan untuk memperoleh suku ke-n dari barisan aritmetika bertingkat k, dengan syarat diketahui sebanyak $k+1$ suku dari barisan tersebut. Melalui beberapa contoh ternyata bahwa rumus suku ke-n menggunakan interpolasi Lagrange, yaitu $U_n^{(k)}$ dapat digunakan untuk memperoleh nilai suku yang diinginkan.

Kata Kunci: barisan bertingkat, aritmetika, interpolasi Lagrange

Abstract

This paper discusses about a method that has never been used to construct the n^{th} term formula of a multilevel arithmetic sequence using Lagrange's interpolation. The formula that has been obtained can be utilized to find the n^{th} term of a k-level arithmetic sequence by providing a number $k+1$ terms of the sequence. Through several examples, it turns out that the n^{th} term formula using Lagrange interpolation, namely $U_n^{(k)}$ can be used to obtain the desired term value.

***Keywords**: multilevel sequence, arithmetic, Lagrange interpolation*

1 Pendahuluan

Salah satu cabang materi aljabar yang dipelajari di sekolah menengah pertama (SMP) dan sekolah menengah atas (SMA) adalah barisan dan deret. Barisan didefinisikan sebagai susunan bilangan yang mempunyai pola atau aturan tertentu antara satu bilangan dan bilangan lainnya [1], sedangkan deret adalah jumlahan dari suku-suku suatu barisan. Dalam pembelajaran matematika di SMP dan SMA, barisan yang umum dipelajari adalah barisan aritmetika dan geometri. Barisan aritmetika adalah susunan bilangan yang mempunyai selisih atau beda yang sama di setiap dua suku yang berurutan [2], sedangkan barisan geometri didefinisikan sebagai susunan bilangan yang memiliki rasio atau perbandingan yang sama di setiap dua suku yang berurutan.

Salah satu jenis barisan aritmetika yang umum dijumpai adalah barisan aritmetika bertingkat. Barisan ini mempunyai prinsip yang hampir sama dengan barisan aritmetika. Perbedaan dengan barisan aritmetika biasa adalah ketika beda atau selisih yang konstan di setiap dua suku berurutan tidak langsung ditentukan. Mendapatkan suku ke-n (U_n) barisan aritmetika bertingkat tidak bisa dilakukan dengan rumus U_n dari barisan aritmetika biasa. Beberapa rumus U_n barisan aritmetika bertingkat ini telah dibahas di [3] yaitu melalui pendekatan persamaan polinomial dan segitiga Pascal.

Berdasarkan [3] untuk mendapatkan U_n barisan aritmetika dapat dilakukan melalui persamaan polinomial, maka salah satu metode numerik yang bisa dimanfaatkan adalah interpolasi [4]. Interpolasi yang digunakan dalam penelitian ini untuk mengkonstruksi rumus U_n dari barisan bertingkat k adalah interpolasi Lagrange. Pada umumnya, interpolasi ini mempunyai prinsip yang sama dengan beberapa metode interpolasi lainnya, seperti Newton, Hermite, dan *cubic spline* dengan memanfaatkan beberapa titik sampel untuk mendekati suatu hampiran nilai yang diinginkan [4]. Interpolasi Lagrange telah dimanfaatkan untuk beberapa aplikasi diantaranya adalah estimasi harga saham [5], peramalan HIV [6] dan peramalan jumlah penduduk [7]. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumus U_n barisan aritmetika bertingkat k menggunakan interpolasi Lagrange yang dapat dijadikan sebagai alternatif solusi untuk mendapatkan nilai suku yang diinginkan.

2 Metode Penelitian

Bagian ini menjelaskan langkah-langkah pengerjaan tentang bagaimana mengkonstruksi rumus U_n dari barisan aritmetika bertingkat k menggunakan pendekatan interpolasi Lagrange. Beberapa tahapan yang dilakukan adalah sebagai berikut:

- Pembahasan barisan aritmetika bertingkat.

  Bagian ini berisi penjelasan tentang bentuk umum suatu barisan aritmetika bertingkat. Selanjutnya, untuk memperjelas pengertian barisan aritmetika bertingkat diberikan beberapa contoh.
- Menyajikan langkah-langkah untuk mendapatkan rumus barisan aritmetika bertingkat.

  Pada bagian ini dibahas tentang bagaimana mendapatkan polinomial interpolasi untuk mendekati nilai dari suatu fungsi pada sebuah titik melalui beberapa titik yang telah diketahui. Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah interpolasi Lagrange. Berdasarkan interpolasi Lagrange, rumus U_n barisan aritmetika bertingkat k dapat dikonstruksi dan selanjutnya rumus yang diperoleh digunakan pada beberapa contoh kasus.

- Penarikan kesimpulan.

  Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, bagian ini adalah bagian terakhir dari paper yang berisi tentang kesimpulan dari penelitian yang dibahas.

3 Hasil dan Pembahasan

Bagian ini berisi tentang penjelasan dari barisan aritmetika bertingkat, interpolasi Lagrange dan hasil penelitian yaitu rumus U_n dari barisan aritmetika bertingkat k beserta contoh-contoh yang diselesaikan dengan rumus yang diperoleh menggunakan pendekatan interpolasi Lagrange.

3.1 Barisan Aritmetika Bertingkat

Penyebutan barisan ini digunakan ketika beda atau selisih dari barisan tersebut konstan pada tingkat k, untuk $k \geq 2$. Pada dasarnya, barisan aritmetika sebagaimana yang diketahui merupakan barisan aritmetika bertingkat 1, karena beda dari barisan tersebut konstan pada tingkat ke-1. Sebelum membahas barisan aritmetika bertingkat k, terlebih dahulu dijelaskan kembali tentang barisan aritmetika bertingkat yang paling sederhana yaitu barisan aritmetika. Diberikan barisan bilangan sebagai berikut:

$$U_1, U_2, U_3, \cdots, U_{n-1}, U_n \tag{1}$$

Barisan (1) disebut barisan aritmetika, jika barisan tersebut memenuhi syarat barisan aritmetika yaitu

$$U_i - U_{i-1} = b, \quad i = 2, 3, \cdots, n, \tag{2}$$

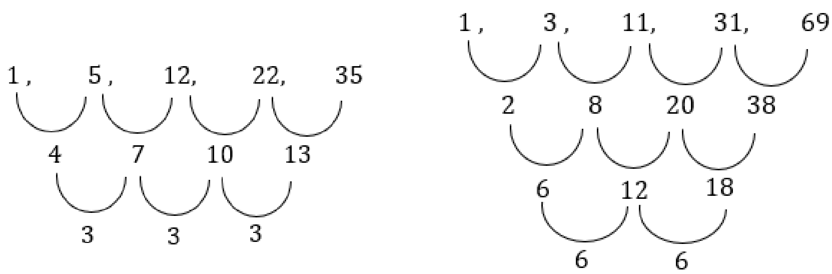
dalam (2), b dinamakan beda dari barisan aritmetika (1).

Contoh dari barisan aritmetika adalah sebagai berikut:

$1, 2, 3, 4, \cdots$ → barisan aritmetika dengan beda 1

$20, 15, 10, 5, \cdots$ → barisan aritmetika dengan beda -5

Barisan aritmetika bertingkat k, $k \geq 2$ adalah barisan bilangan dimana beda dari setiap dua suku yang berurutan tidak sama, tetapi pada tingkat ke-k beda dari setiap dua suku yang berurutan konstan. Gambar 1 adalah salah satu contoh untuk mengilustrasikan barisan aritmetika bertingkat 2 dan 3.



Gambar 1. Barisan aritmetika bertingkat 2 (kiri) dan aritmetika bertingkat 3 (kanan)

Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa untuk barisan aritmetika bertingkat 2 dengan beda dari barisan tersebut konstan sebesar 3, sedangkan untuk barisan aritmetika bertingkat 3, beda dari barisan tersebut konstan sebesar 6. Selanjutnya, untuk mendapatkan rumus U_n barisan aritmetika bertingkat k digunakan pendekatan interpolasi Lagrange.

3.2 Interpolasi Lagrange

Menentukan polinomial derajat satu yang melalui dua titik yang berbeda yaitu (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) sama halnya dengan mencari sebuah fungsi f dimana $f(x_0) = y_0$ dan $f(x_1) = y_1$. Mendapatkan polinomial f dengan memanfaatkan titik-titik interval yang diberikan dinamakan interpolasi polinomial [4]. Selanjutnya, didefinisikan polinomial interpolasi Lagrange linier yang melalui (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) adalah sebagai berikut [4]:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) \tag{3}$$

dimana,

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ dan } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \ \ x_0 \neq x_1.$$

Ketika $x = x_0$ dan $x = x_1$, maka

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, \text{dan } L_1(x_1) = 1,$$

yang mengakibatkan

$$P_1(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_0) = f(x_0) = y_0,$$

dan

$$P_1(x_1) = 0 \cdot f(x_1) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Hal ini menunjukkan bahwa polinomial P_1 pada Persamaan (3) adalah polinomial derajat satu tunggal yang melalui (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Kemudian, untuk mendapatkan polinomial derajat dua yang melalui tiga titik yang berbeda yaitu $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ dan (x_2, y_2) dimana $x_0 \neq x_1 \neq x_2$, polinomial interpolasi Lagrange dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \tag{4}$$

Agar memenuhi $P_2(x_0) = f(x_0) = y_0, P_2(x_1) = f(x_1) = y_1$ dan $P_2(x_2) = f(x_2) = y_2$, maka haruslah

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{bila } i \neq j, \quad i,j = 0,1,2 \\ 1, & \text{bila } i = j, \quad i,j = 0,1,2 \end{cases}.$$

Oleh karena itu, $L_0(x), L_1(x)$ dan $L_2(x)$ dapat didefinisikan sebagai

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \text{dan } L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Selanjutnya, untuk memperumum konsep dari interpolasi polinomial Lagrange linier dan kuadrat, dipertimbangkan konstruksi untuk polinomial berderajat k melalui $k+1$ titik yang berbeda, yaitu:

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_1, f(x_1)\big), \cdots, \big(x_k, f(x_k)\big).$$

Polinomial interpolasi Lagrange, yaitu $P_k(x)$ melalui $k+1$ titik yang berbeda, $x_0, x_1, \cdots, x_k$ dengan $x_i \neq x_j, i, j = 0,1, \cdots, k$ dan nilai $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_k)$ berdasarkan [4], didefinisikan sebagai:

$$P_k(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_k)L_k(x) = \sum_{j=0}^{k} f(x_j)L_j(x) \tag{5}$$

dimana untuk sembarang j tetap di $\{0,1, \cdots, k\}$, didefinisikan

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{k} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right).$$

Selanjutnya, dengan menggunakan bentuk Persamaan (5), rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k akan dapat dikonstruksi dari nilai suku-suku yang diketahui.

Untuk mendapatkan rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k yang dinotasikan oleh $U_n^{(k)}$ dapat dilakukan dengan mendefinisikan ulang absis dan ordinat dari pasangan $k+1$ titik yang diberikan. Misalkan didefinisikan $x_0 = 1, x_1 = 2, \cdots, x_k = k+1$ dan $f(x_0) = U_1, f(x_1) = U_2, \cdots, f(x_k) = U_{k+1}$, sehingga dengan polinomial $P_k(x)$ pada Persamaan (5), rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k dapat dituliskan menjadi:

$$U_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k+1} \left[U_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k+1} \left(\frac{n-i}{j-i}\right) \right] \tag{6}$$

Untuk mengimplementasikan hasil yang diperoleh pada Persamaan (6), maka diberikan contoh barisan aritmetika bertingkat 2 dan 3.

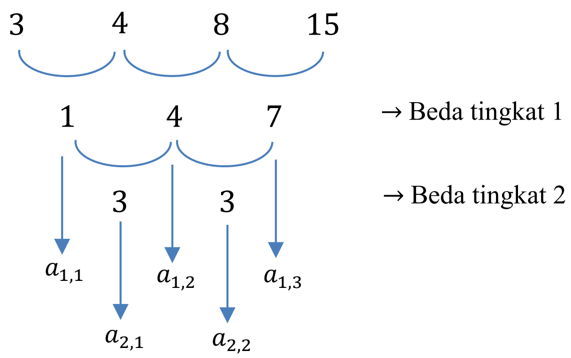
Contoh 1 *Tentukan 3 suku selanjutnya, jika diberikan barisan aritmetika bertingkat 2 sebagai berikut: 3, 4, 8, 15, ...*

Barisan pada contoh 1 termasuk barisan aritmetika bertingkat 2, karena beda dari barisan tersebut konstan pada tingkat ke-2 (Gambar 2).

Untuk mendapatkan suku ke-5, 6 dan 7 dari contoh 1, maka Persamaan (6) dapat dituliskan dalam bentuk rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat 2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U_n^{(2)} &= \frac{U_1}{2}(n-2)(n-3) - U_2(n-1)(n-3) + \frac{U_3}{2}(n-1)(n-2) \\ &= \frac{3}{2}(n-2)(n-3) - 4(n-1)(n-3) + \frac{8}{2}(n-1)(n-2) \\ &= \frac{3}{2}(n^2-5n+6) - \frac{8}{2}(n^2-4n+3) + \frac{8}{2}(n^2-3n+2) \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 5 \end{aligned}$$

- Untuk $n = 5$, maka $U_5^{(2)} = \frac{3}{2}(5)^2 - \frac{7}{2}(5) + 5 = 25$
- Untuk $n = 6$, maka $U_6^{(2)} = \frac{3}{2}(6)^2 - \frac{7}{2}(6) + 5 = 38$
- Untuk $n = 7$, maka $U_7^{(2)} = \frac{3}{2}(7)^2 - \frac{7}{2}(7) + 5 = 54$



Gambar 2. Barisan aritmetika bertingkat 2

Untuk memverifikasi hasil ini, maka dapat dibandingkan dengan rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k, yaitu U_n dari pendekatan segitiga Pascal [3]. Karena merupakan barisan aritmetika bertingkat 2, maka rumus U_n yang digunakan adalah

$$U_n = U_1 + a_{1,1}(n-1) + \frac{a_{2,1}}{2!}(n-1)(n-2), \text{dengan } U_1 = 3, a_{1,1} = 1 \text{ dan } a_{2,1} = 3,$$

dimana: $a_{1,1}$ merupakan beda pertama pada tingkat 1, sedangkan $a_{2,1}$ merupakan beda konstan pada tingkat 2. Sehingga,

$$U_n = 3 + 1(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)(n-2) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 5$$

- Untuk $n = 5$, maka $U_5 = \frac{3}{2}(5)^2 - \frac{7}{2}(5) + 5 = 25$
- Untuk $n = 6$, maka $U_6 = \frac{3}{2}(6)^2 - \frac{7}{2}(6) + 5 = 38$
- Untuk $n = 7$, maka $U_7 = \frac{3}{2}(7)^2 - \frac{7}{2}(7) + 5 = 54$

Dengan menggunakan konsep yang sama yaitu 3 suku berurutan yang diketahui, yaitu $U_j, j = 2, 3, 4$, maka rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat 2 dapat dikonstruksi sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
U_n^{(2)} = \; & \frac{U_2}{(2-3)(2-4)}(n-3)(n-4) - \frac{U_3}{(3-2)(3-4)}(n-2)(n-4) \\
& + \frac{U_4}{(4-2)(4-3)}(n-2)(n-3) \\
= \; & \frac{4}{2}(n-3)(n-4) - 8(n-2)(n-4) + \frac{15}{2}(n-2)(n-3) \\
= \; & \frac{4}{2}(n^2-7n+12) - \frac{16}{2}(n^2-6n+8) + \frac{15}{2}(n^2-5n+6) \\
= \; & \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 5
\end{aligned}
$$

Untuk metode segitiga Pascal, dengan memanfaatkan suku ke-2, beda kedua pada tingkat 1, dan beda kedua pada tingkat 2 berturut-turut dinotasikan $U_2, a_{1,2}$, dan $a_{2,2}$, rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat 2 diperoleh sebagai berikut:

$$U_n = U_2 + a_{1,2}(n-2) + \frac{a_{2,2}}{2!}(n-2)(n-3),$$

dengan $U_2 = 4, a_{1,2} = 4$, dan $a_{2,2} = 3$,maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
U_n \; & = 4 + 4(n-2) + \frac{3}{2}(n-2)(n-3) \\
& = 4 + 4n - 2 + \frac{3}{2}(n^2 - 5n + 6) \\
& = 2 + 4n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{15}{2}n + 3 = \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 5
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan dengan menggunakan 3 suku berurutan, yaitu U_2, U_3, U_4 pada interpolasi Lagrange dan $U_2, a_{1,2}$, dan $a_{2,2}$ pada segitiga Pascal, rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat 2 yang diperoleh adalah sama. Hal ini menunjukkan bahwa rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k dapat diperoleh dari setiap $k+1$ suku berurutan yang telah diketahui.

Contoh 2 *Tentukan suku ke–8 dari barisan 1, 3, 9, 21, 41, …*

Barisan pada contoh 2 termasuk barisan aritmetika bertingkat 3, karena bedanya konstan bernilai 2 pada tingkat ke-3.

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
1 & & 3 & & 9 & & 21 & & 41 & & \\
& 2 & & 6 & & 12 & & 20 & & & \rightarrow \text{Beda tingkat 1} \\
& & 4 & & 6 & & 8 & & & & \rightarrow \text{Beda tingkat 2} \\
& & & 2 & & 2 & & & & & \rightarrow \text{Beda tingkat 3}
\end{array}
$$

Sehingga, dari Persamaan (6), rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat 3 dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} U_n^{(3)} = & -\frac{U_1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)+\frac{U_2}{2}(n-1)(n-3)(n-4) \\ & -\frac{U_3}{2}(n-1)(n-2)(n-4)+\frac{U_4}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \\ = & -\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)+\frac{3}{2}(n-1)(n-3)(n-4) \\ & -\frac{9}{2}(n-1)(n-2)(n-4)+\frac{21}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \\ = & \ \frac{n^3-n+3}{3} \end{aligned}$$

Sehingga suku ke-8 dari barisan tersebut adalah

$$U_8^{(3)} = \frac{(8)^3-8+3}{3} = \frac{507}{3} = 169$$

Untuk melakukan verifikasi hasil tersebut, maka dilakukan perbandingan yang sama seperti pada contoh 1. Karena merupakan barisan aritmetika bertingkat 3, maka U_n dapat dituliskan menjadi bentuk sebagai berikut:

$$U_n = U_1 + a_{1,1}(n-1) + \frac{a_{2,1}}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{a_{3,1}}{3!}(n-1)(n-2)(n-3),$$

dengan, $U_1 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 2$, dimana: $a_{1,1}$ merupakan beda pertama pada tingkat 1, $a_{2,1}$ merupakan beda pertama pada tingkat 2, dan $a_{3,1}$ merupakan beda konstan pada tingkat 3. Rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_n & = 1 + 2(n-1) + \frac{4}{2}(n-1)(n-2) + \frac{2}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \\ & = \frac{n^3-n+3}{3}, \end{aligned}$$

sehingga, suku ke-8, yaitu $U_8 = \frac{(8)^3-8+3}{3} = 169$

Dari contoh 1 dan 2, maka hasil yang diperoleh sama, baik menggunakan rumus U_n dari pendekatan segitiga Pascal [3] dan rumus $U_n^{(k)}$ dari interpolasi Lagrange. Selanjutnya, untuk menentukan nilai suku yang lebih tinggi, maka perhitungan dapat dilakukan dengan bantuan komputer dengan menggunakan algoritma berikut.

Algoritma	Menentukan suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k dengan interpolasi Lagrange
1:	Tentukan tingkat dari barisan aritmetika, yaitu nilai k.

2: **Input**: nilai dari $k+1$ suku yang diketahui, yaitu U_j, dimana $j = 1, 2, 3 \cdots, k+1$ dan suku yang ingin dicari nilainya, yaitu n.

3: For $j = 1, 2, 3, \cdots, k+1$

For $i = 1, 2, 3, \cdots, k+1$

If $i \neq j$

$$L_j = \prod_i \left(\frac{n-i}{j-i}\right)$$

End

End

$$U_n^{(k)} = \sum_j U_j L_j$$

End

4: **Output**: nilai suku ke-n, yaitu $U_n^{(k)}$

4 Simpulan

Berdasarkan analisis hasil dan pembahasan yang telah dibahas, rumus suku ke-n barisan aritmetika bertingkat k yang diperoleh menggunakan interpolasi Lagrange adalah sebagai berikut:

$$U_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k+1} \left[U_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \left(\frac{n-i}{j-i}\right) \right].$$

Dengan menggunakan $U_n^{(k)}$, nilai suku yang diinginkan dari barisan aritmetika bertingkat k dapat diperoleh, yaitu dengan memanfaatkan nilai $k+1$ suku yang telah diketahui. Hasil dengan pendekatan yang diusulkan juga telah diverifikasi dan dibandingkan dengan metode segitiga Pascal.

5 Daftar Pustaka

[1] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Fourth Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[2] P. Iryanti, *Pembelajaran Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma di SMA*. Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika, 2008.

[3] Y. Azrida and S. Gemawati, “Menentukan Suku Ke-n Barisan Bertingkat,” vol. 1, no. 2, pp. 45–53, 2015.

[4] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Ninth Ed. Boston, MA 02210: Richard Stratton, 2015.

[5] L. W. Astuti, S. Sudarwanto, and L. Ambarwati, "Perbandingan Metode Lagrange dan Metode Newton pada Interpolasi Polinomial dalam Mengestimasi Harga Saham," *JMT J. Mat. dan Terap.*, vol. 2, no. 1, pp. 25–35, 2018.

[6] T. Yulianto, N. I. Ulfaniyah, and R. Amalia, "Peramalan HIV Menggunakan Interpolasi Lagrange," *Zeta-Math J.*, vol. 2, no. 1, pp. 3–6, 2016.

[7] I. Rodliyah, "Aplikasi Interpolasi Lagrange dan Ekstrapolasi dalam Peramalan Jumlah Penduduk," in *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 2015, pp. 265–272.