Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 1, Mei 2022, 15-25
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i1.8974

# Pendekatan Analisis Derau Putih untuk Arus Stokastik dari Gerak Brown Subfraksional

**Herry Pribawanto Suryawan**
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia
e-mail: herrypribs@usd.ac.id

*Diajukan: 23 Maret 2021, Diperbaiki: 21 Januari 2022, Diterima: 7 Maret 2022*

**Abstrak**

Gerak Brown subfraksional adalah sebuah generalisasi dari gerak Brown yang bersifat Gaussian tetapi tidak memiliki kenaikan yang stasioner. Di dalam makalah ini akan dipelajari arus stokastik dari gerak Brown subfraksional berdimensi satu. Metode yang digunakan adalah dengan menggunakan analisis derau putih yaitu gerak Brown subfraksional direpresentasikan sebagai fungsional stokastik dari derau putih. Sebagai hasil utama dibuktikan bahwa arus stokastik dari gerak Brown subfraksional berdimensi satu adalah sebuah fungsi yang diperumum di dalam ruang distribusi Hida.

**Kata Kunci**: gerak Brown subfraksional, arus stokastik, analisis derau putih

**Abstract**

*The subfractional Brownian motion is a Gaussian generalization of the Brownian motion whose increments are not stationary. In this paper we study the stochastic current of the one dimensional subfractional Brownian motion. For this purpose we use the method from white noise analysis by representing the subfractional Brownian motion as stochastic functionals of white noise. As the main result we prove that the stochastic current of the one dimensional subfractional Brownian motion is a generalized function in the space of Hida distributions.*

***Keywords**: subfractional Brownian motion, stochastic current, white noise analysis*

## 1 Pendahuluan

Konsep arus (*current*) berasal dari teori ukuran geometrik. Sebuah versi yang sederhana dari arus diberikan oleh fungsional

$$\varphi \mapsto \int_0^T \big(\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\big)_{\mathbb{R}^d}\, dt, \qquad 0 < T < \infty,$$

dengan $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dan $\gamma(t)$ adalah sebuah kurva rektifiabel di $\mathbb{R}^d$. Fungsional ini dapat direpresentasikan dalam bentuk

$$\xi(x) = \int_0^T \delta\big(x - \gamma(t)\big)\gamma'(t)\, dt,$$

dengan $\delta$ adalah fungsi delta Dirac. Pembahasan lebih lengkap terkait konsep arus dapat dilihat di dalam [1] dan [2]. Versi probabilistik dari arus muncul ketika kurva deterministik $\gamma(t), t \in [0, T]$, diganti dengan lintasan sampel (trayektori) dari sebuah proses stokastik $(Y_t)_{t\in[0,T]}$. Dalam hal ini kita mendapatkan fungsional

$$\zeta(x) := \int_0^T \delta(x - Y_t)\, dY_t \tag{1}$$

yang untuk selanjutnya disebut dengan arus stokastik (*stochastic current*). Integral stokastik (1) harus didefinisikan secara rigor bergantung pada kelas proses stokastik yang dibicarakan. Arus stokastik dipelajari pertama kali oleh Flandolli et al. di dalam [3] untuk proses stokastik berupa gerak Brown.

Di dalam makalah ini kita akan mempelajari (1) dengan $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ adalah sebuah gerak Brown subfraksional berdimensi satu. Gerak Brown subfraksional pertama kali diperkenalkan oleh Bojdecki et al. di dalam [4] dalam kaitannya dengan kajian fluktuasi waktu okupasi dari sistem partikel bercabang dengan kondisi awal Poisson. Gerak Brown subfraksional dengan parameter $H \in (0,1)$ adalah sebuah proses Gaussian terpusat $S^H = (S_t^H)_{t\geq 0}$ dengan $S_0^H = 0$ hampir di mana-mana serta fungsi kovariansi

$$cov(S_t^H, S_s^H) = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}((s+t)^{2H} + |t-s|^{2H}), \quad s,t \geq 0\,. \tag{2}$$

Untuk $H = \frac{1}{2}$ kita mendapatkan gerak Brown baku. Salah satu cara menunjukkan eksistensi gerak Brown subfraksional adalah dengan memperhatikan proses stokastik $X^H = (X_t^H)_{t\geq 0}$ dengan

$$X_t^H := \frac{B_t^H + B_{-t}^H}{\sqrt{2}}, \quad t \geq 0,$$

dengan $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ adalah gerak Brown fraksional bersisi dua. Jelas bahwa $X^H$ adalah proses Gaussian dan mudah diperiksa bahwa fungsi kovariansi dari $X^H$ identik dengan (2). Gerak Brown subfraksional memiliki sifat-sifat yang hampir sama dengan gerak Brown fraksional seperti keserupaan-diri, lintasan sampel yang kontinu Holder, kebergantungan dalam jangkauan yang panjang, kenaikan yang tidak saling bebas, bukan semimartingale, dan bukan proses Markov. Perbedaan utama terletak pada fakta bahwa gerak Brown fraksional mempunyai kenaikan yang stasioner sementara gerak Brown subfraksional tidak mempunyai kenaikan yang stasioner. Untuk pembahasan yang lebih lengkap bisa ditemukan di dalam [5]. Telah dibuktikan bahwa gerak Brown subfraksional adalah sebuah kuasi-heliks menurut Kahane, yakni untuk setiap $s,t \geq 0$ berlaku ketaksamaan

$$\big((2 - 2^{2H-1}) \wedge 1\big)(t-s)^{2H} \leq \mathbb{E}(S_t^H - S_s^H)^2 \leq \big((2 - 2^{2H-1}) \vee 1\big)(t-s)^{2H}.$$

Beberapa hasil penelitian terkait gerak Brown subfraksional, seperti sifat-sifatnya, waktu lokal, kalkulus stokastik, dan representasi derau putih dapat dilihat di dalam [6]-[12].

Objek utama di dalam makalah ini adalah arus stokastik dari gerak Brown subfraksional yakni integral stokastik (1) dengan proses stokastik $(X_t)_{t\in[0,T]}$ adalah gerak Brown subfraksional $X^H = (X_t^H)_{t\in[0,T]}$:

$$\zeta(x) = \int_0^T \delta(x - X_t^H)\, dX_t^H \tag{3}$$

Beberapa hasil penelitian terkait arus stokastik yang telah dikerjakan beberapa peneliti lain adalah melalui pendekatan kalkulus Malliavin dan integral stokastik dengan regularisasi dan proses stokastik yang dikaji adalah gerak Brown serta gerak Brown fraksional, lihat [13]-[14]. Pada makalah ini akan digunakan pendekatan analisis derau putih dan secara lebih spesifik, integral stokastik (3) diinterpretasikan sebagai integral stokastik tipe Wick, yakni sebuah perluasan dari integral Hitsuda-Skorokhod yang dibicarakan di dalam [15].

Di dalam bagian 2 akan dirangkum metode penelitian atau pendekatan yang digunakan yakni teori analisis derau putih. Bagian 3 memuat hasil utama dan baru di dalam makalah ini yakni bukti eksistensi arus stokastik tipe Wick dari gerak Brown subfraksional berdimensi satu sebagai distribusi Hida. Terakhir, di bab 4 akan diberikan simpulan dan rencana pengembangan penelitian.

## 2 Metode Penelitian

Arus stokastik untuk gerak Brown subfraksional (3) akan dipelajari dengan menggunakan pendekatan analisis derau putih atau yang dikenal juga dengan nama kalkulus Hida. Analisis derau putih merupakan cabang dari analisis stokastik dengan peubah acak yang menjadi dasarnya adalah derau putih (*white noise*) yang merupakan turunan distribusional dari gerak Brown. Kita akan merangkum beberapa konsep dasar dari analisis derau putih yang digunakan di dalam makalah ini. Untuk pembahasan yang lengkap dapat dilihat pada [15]-[17].

Kita mulai dengan tripel Gelfand

$$S(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow S'(\mathbb{R})$$

dengan $L^2(\mathbb{R})$ adalah ruang Hilbert dari fungsi yang kuadratnya terintegral Lebesgue pada $\mathbb{R}$, $S(\mathbb{R})$ adalah ruang fungsi tes Schwartz dan $S'(\mathbb{R})$ adalah ruang distribusi *tempered*. Norma baku pada $L^2(\mathbb{R})$ dinotasikan dengan $|\cdot|_0$ sementara pasangan dual antara $S'(\mathbb{R})$ dengan $S(\mathbb{R})$ dinotasikan dengan $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Menurut Teorema Bochner-Minlos, terdapat dengan tunggal ukuran peluang $\mu$ pada aljabar-$\sigma$ $\mathcal{B}$ yang dibangun oleh himpunan silinder di dalam $S'(\mathbb{R})$ dengan fungsi karakteristik yang diberikan oleh

$$C(\varphi) = \int_{S'(\mathbb{R})} e^{i\langle\omega,\varphi\rangle}\, d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\varphi|_0^2}, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

Ruang peluang $(S'(\mathbb{R}),\mathcal{B},\mu)$ disebut dengan ruang derau putih. Di dalam kerangka ini gerak Brown baku $(B_t)_{t\geq 0}$ diberikan oleh

$$B_t(\omega) := \langle \omega, 1_{[0,t)} \rangle, \quad \omega \in S'(\mathbb{R}), t \geq 0$$

dan $1_A$ menotasikan fungsi indikator dari himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$.

Kita akan memanfaatkan sebuah representasi dari gerak Brown subfraksional pada ruang derau putih dengan menggunakan operator $M_-^H$ dengan definisi

$$M_-^H f := \begin{cases} C_H D_-^{-(H-\frac{1}{2})} f & , \ jika \ 0 < H < \dfrac{1}{2} \\ f & , \ jika \ H = \dfrac{1}{2} \\ C_H I_-^{H-\frac{1}{2}} f & , \ jika \ \dfrac{1}{2} < H < 1 \end{cases}$$

dengan $C_H = \sqrt{2H sin(\pi H)\Gamma(2H)}$ dan $\Gamma$ adalah fungsi gamma. Di sini, untuk $0 < \beta < 1$, $I_-^\beta$ adalah operator integral fraksional Weyl dengan definisi

$$\left(I_-^\beta f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{\beta-1} \ dt,$$

asalkan integral ini ada untuk hampir semua $x \in \mathbb{R}$. Sementara itu $D_-^\beta$ adalah operator turunan fraksional Marchaud dengan definisi

$$\left(D_-^\beta f\right)(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_h^\infty \frac{f(x) - f(x+t)}{t^{1+\beta}} \ dt,$$

asalkan limit ini ada di dalam $L^p(\mathbb{R})$ untuk suatu $p > 1$. Daerah asal operator $M_-^H$ memuat $S(\mathbb{R})$ dan juga himpunan semua fungsi indikator. Kita juga akan menggunakan perluasan ganjil dari fungsi Borel $f$ pada $[0,\infty)$ yang didefinisikan dengan

$$f^o(x) := \begin{cases} f(x) & , \ jika \, x \geq 0 \\ -f(-x) & , \ jika \, x < 0. \end{cases}$$

**Teorema 1**[18] *Diberikan* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *adalah gerak Brown baku pada* $\mathbb{R}$. *Berlaku* $M_-^H 1_{[0,t)}^o \in L^2(\mathbb{R})$ *dan*

$$X_t^H = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(M_-^H 1_{[0,t)}^o\right)(s) dB_s = \langle \cdot, \frac{1}{\sqrt{2}} M_-^H 1_{[0,t)}^o \rangle.$$

Dari ruang derau putih $(S'(\mathbb{R}),\mathcal{B},\mu)$ dapat dibentuk, misalnya dengan menggunakan operator kuantisasi kedua, tripel Gelfand yang kedua yakni

$$(S) \hookrightarrow L^2(\mu) := L^2(S'(\mathbb{R}),\mathcal{B},\mu) \hookrightarrow (S)'$$

dengan $(S)$ adalah ruang fungsi tes Hida dan $(S)'$ adalah ruang dual topologi dari $(S)$ yang dikenal dengan nama ruang distribusi Hida. Untuk setiap $t \geq 0$ berlaku $X_t^H \in L^2(\mu)$. Proses stokastik $(W_t^H)_{t\geq 0}$ yang didefinisikan melalui

$$W_t^H := \frac{d}{dt} X_t^H,$$

dengan kekonvergenan berlaku di $(S)'$ terhadap topologi limit induktif, disebut derau putih subfraksional. Untuk setiap $t \geq 0$ berlaku $W_t^H \in (S)' \setminus L^2(\mu)$.

Sebuah alat yang penting di dalam analisis derau putih adalah transformasi $S$ yang didefinisikan pada $(S)'$ dengan

$$S\Phi(\varphi) := \langle\langle \Phi, e_w^{\langle \cdot,\varphi\rangle} \rangle\rangle, \;\; \Phi \in (S)', \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

Di sini $e_w^{\langle \cdot,\varphi\rangle} = C(\varphi) e^{\langle \cdot,\varphi\rangle}$ disebut eksponensial Wick dan $\langle\langle \cdot,\cdot \rangle\rangle$ adalah simbol untuk pasangan dual antara $(S)'$ dengan $(S)$. Transformasi $S$ dapat dipandang sebagai analogi transformasi Laplace terhadap ukuran Gaussian di ruang berdimensi takhingga. Secara umum, perkalian titik demi titik (*pointwise product*) dari dua distribusi tidak bisa didefinisikan. Dengan menggunakan transformasi $S$ kita dapat mendefinisikan sebuah perkalian dari dua distribusi derau putih. Perkalian Wick $\diamond$ dari $\Phi, \Psi \in (S)'$ diberikan oleh

$$\Phi \diamond \Psi := S^{-1}(S\Phi \cdot S\Psi).$$

Perkalian Wick terdefinisi dengan baik sebab transformasi $S$ bersifat injektif dan daerah hasil dari transformasi $S$ merupakan sebuah aljabar.

Untuk selanjutnya kita juga akan menggunakan operator dual dari $M_-^H$ yang dinotasikan dengan $M_+^H$ dan definisinya diberikan oleh

$$M_+^H f := \begin{cases} C_H D_+^{-(H-\frac{1}{2})} f & , \; jika \;\; 0 < H < \frac{1}{2} \\ f & , \; jika \;\; H = \frac{1}{2} \\ C_H I_+^{H-\frac{1}{2}} f & , \; jika \;\; \frac{1}{2} < H < 1 \end{cases}$$

dimana, untuk $0 < \beta < 1$, $I_+^\beta$ adalah operator integral fraksional Weyl dengan definisi

$$\left(I_+^\beta f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\beta-1}\, dt,$$

asalkan integral ini ada untuk hampir semua $x \in \mathbb{R}$ dan $D_+^\beta$ adalah operator turunan fraksional Marchaud dengan definisi

$$\left(D_+^\beta f\right)(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_{h}^{\infty} \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\beta}}\, dt,$$

asalkan limit ini ada di dalam $L^p(\mathbb{R})$ untuk suatu $p > 1$.

Kita akan memerlukan sifat terkait keterbatasan operator $M_{\pm}^{H}$ berikut.

**Teorema 2**[18] Diberikan $H \in (0,1)$ dan $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Maka, $M_{\pm}^{H}\varphi$ ada dan lebih lanjut, terdapat konstanta $C_H$, yang tidak bergantung pada $\varphi$, sehingga

$$\sup\{|M_{\pm}^{H}\varphi(x)|: x \in \mathbb{R}\} \leq C_H \left(\sup\{|\varphi(x)|: x \in \mathbb{R}\} + \sup\{|\varphi'(x)|: x \in \mathbb{R}\} + |\varphi|_{L^1(\mathbb{R})}\right),$$

dengan $|\varphi|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx$.

Transformasi $S$ dari gerak Brown subfraksional dan derau putih subfraksional dapat ditentukan secara eksplisit dengan menggunakan operator $M_{\pm}^{H}$.

**Teorema 3**[19] *Untuk setiap $\varphi \in S(\mathbb{R})$ berlaku*

$$SX_t^H(\varphi) = \langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} M_{-}^{H} 1_{[0,t)}^{o} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^t (M_{+}^{H}\varphi)(s)\, ds - \int_{-t}^{0} (M_{+}^{H}\varphi)(s)\, ds\right)$$

*dan*

$$SW_t^H(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((M_{+}^{H}\varphi)(t) - (M_{+}^{H}\varphi)(-t)\right).$$

Terakhir di bagian ini akan dituliskan sebuah teorema terkait keterintegralan distribusi Hida yang memegang peranan penting di dalam pembuktian hasil utama di dalam makalah ini.

**Teorema 4**[20] *Diberikan ruang ukuran $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ dan fungsi $\lambda \mapsto \Phi_\lambda$ dari $\Omega$ ke $(S)'$. Jika*

*(1). Fungsi $\lambda \mapsto S\Phi_\lambda(\varphi)$ terukur untuk setiap $\varphi \in S(\mathbb{R})$, dan*

*(2). Terdapat $C_1(\lambda) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, $C_2(\lambda) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$, dan norma kontinu $\|\cdot\|$ pada $S(\mathbb{R})$ sehingga untuk $\varphi \in S(\mathbb{R})$ dan $z \in \mathbb{C}$ berlaku*

$$|S\Phi_\lambda(z\varphi)| \leq C_1(\lambda) e^{C_2(\lambda)|z|^2\|\varphi\|^2},$$

*maka $\Phi_\lambda$ terintegral Bochner di dalam $(S)'$. Lebih jauh berlaku $\int_\Omega \Phi_\lambda\, d\nu(\lambda) \in (S)'$ dan*

$$S\left(\int_\Omega \Phi_\lambda\, d\nu(\lambda)\right) = \int_\Omega S\Phi_\lambda\, d\nu(\lambda).$$

## 3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini kita akan membuktikan hasil utama di dalam makalah ini yakni eksistensi arus stokastik tipe Wick dari gerak Brown subfraksional sebagai sebuah distribusi Hida. Kebaruan di dalam makalah ini adalah interpretasi arus stokastik (3) dengan menggunakan perkalian Wick. Untuk itu terlebih dahulu akan dibuktikan sebuah hasil terkait fungsional delta Donsker. Secara informal, fungsional delta Donsker adalah komposisi dari fungsi delta Dirac dengan gerak Brown subfraksional.

**Teorema 5** Diberikan gerak Brown subfraksional $(X_t^H)_{t\geq 0}$ dan $x \in \mathbb{R}$. Fungsional delta Donsker

$$\delta(x - X_t^H) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(i\langle \lambda, x - X_t^H\rangle)\ d\lambda$$

adalah distribusi Hida dengan transformasi $S$ berbentuk

$$S\delta(x - X_t^H)(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}}\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}\left(x - \langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\ \rangle\right)^2\right)$$

untuk setiap $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

***Bukti***. Untuk sebarang $\varphi \in S(\mathbb{R})$ berlaku

$$\begin{aligned}
&S\exp(i\langle \lambda, x - X_t^H\rangle)(\varphi)\\
&\quad = \langle\langle \exp(i\langle \lambda, x - X_t^H\rangle), C(\varphi)\exp(\langle \cdot, \varphi\rangle)\rangle\rangle\\
&\quad = \exp\left(i(\lambda, x) - \frac{1}{2}|\varphi|_0^2\right)\int_{S(\mathbb{R})} \exp\left(\langle \omega, \varphi - \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right)\ d\mu(\omega)\\
&\quad = \exp\left(i(\lambda, x) - \frac{1}{2}|\varphi|_0^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left|\varphi - \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\right|_0^2\right)\\
&\quad = \exp\left(i\left(\lambda, x - \langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right) - \frac{1}{2}\lambda^2\left|\frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\right|_0^2\right)
\end{aligned}$$

adalah fungsi terukur Lebesgue pada $\mathbb{R}$. Lebih jauh, untuk setiap $\varphi \in S(\mathbb{R})$ dan $z \in \mathbb{C}$ berlaku

$$\begin{aligned}
&|S\exp(i\langle \lambda, x - X_t^H\rangle)(z\varphi)|\\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 Var(X_t^H)\right)\exp\left(|z||\lambda|\left|\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\right|\right)\\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 Var(X_t^H)\right)\exp\left(\frac{1}{4}\lambda^2 Var(X_t^H)\right)\exp(|z|^2|\varphi|_0^2)\\
&\leq \exp\left(-\frac{2-2^{2H-1}}{2}t^{2H}|\lambda|^2\right)\exp(|z|^2|\varphi|_0^2).
\end{aligned}$$

Pada bentuk terakhir, faktor pertama adalah fungsi terintegral terhadap ukuran Lebesgue $d\lambda$ dan faktor kedua konstan terhadap $\lambda$. Jadi, menurut Teorema 4 berlaku $\delta(x - X_t^H) \in (S)'$. Selanjutnya, pegintegralan terhadap $\lambda$, yaitu dengan menggunakan rumus integral Gaussian

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-p^2x^2 \pm qx)\ dx = \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{p}, \quad Re(p^2) > 0.$$

Kita memperoleh

$$S\delta(x - X_t^H)(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S\exp\left(i\langle\lambda, x - X_t^H\rangle\right)(\varphi)\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(i\lambda\left(x - \langle\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right) - \frac{1}{2}\lambda^2 Var(X_t^H)\right)d\lambda$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi Var(X_t^H)}}\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}\left(x - \langle\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}}\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}\left(x - \langle\varphi, M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right)^2\right). \blacksquare$$

Sekarang kita akan membuktikan hasil utama di dalam makalah ini yaitu eksistensi sebagai distribusi derau putih dari arus stokastik untuk gerak Brown subfraksional.

**Teorema 6** Untuk setiap $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, H \in (0,1)$ dan $0 < T < \infty$ arus stokastik tipe Wick

$$\zeta^\diamond(x) := \int_0^T \delta(x - X_t^H)\,d^\diamond X_t^H := \int_0^T \delta(x - X_t^H) \diamond W_t^H\,dt$$

adalah distribusi Hida.

***Bukti***. Sebut $\Phi := \delta(x - X_t^H) \diamond W_t^H \in (S)'$. Kita akan menunjukkan keterintegralan Bochner dari $\Phi$ dengan menggunakan Teorema 4. Dari Teorema 5 kita dapatkan

$$S\Phi(\varphi)$$
$$= S(\delta(x - X_t^H) \diamond W_t^H)(\varphi)$$
$$= S\delta(x - X_t^H)(\varphi) SW_t^H(\varphi)$$
$$= \frac{\left((M_+^H\varphi)(t) - (M_+^H\varphi)(-t)\right)}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}}\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}\left(x - \langle\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right)^2\right),$$

untuk setiap $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Cukup jelas bahwa bentuk terakhir ini terukur Lebesgue. Selanjutnya, untuk setiap $\varphi \in S(\mathbb{R})$ dan $z \in \mathbb{C}$ berlaku

$$|S\Phi(z\varphi)|$$
$$= \frac{\left|\left(M_+^H(z\varphi)\right)(t) - \left(M_+^H(z\varphi)\right)(-t)\right|}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}}\left|\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}\left(x - \langle z\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right)^2\right)\right|$$
$$\leq \frac{\left|\left(M_+^H(z\varphi)\right)(t)\right| + \left|\left(M_+^H(z\varphi)\right)(-t)\right|}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}}\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}x^2\right)$$
$$\exp\left(\frac{1}{(2-2^{2H-1})t^{2H}}\left(\left|xz\,\langle\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\rangle\right| - \frac{1}{2}|z|^2\left|\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}M_-^H 1_{[0,t)}^o\right|^2\right)\right)$$
$$\leq \frac{2|z||M_+^H\varphi|_\infty}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}}\exp\left(-\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}x^2\right)\exp\left(\frac{1}{2(2-2^{2H-1})t^{2H}}x^2 + |z|^2|\varphi|_0^2\right)$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}} \exp(|z|^2|\varphi|_0^2) \ \exp(2|z|^2|M_+^H\varphi|_\infty^2), \qquad |\eta|_\infty := \sup\{|\eta(x)|: x \in \mathbb{R}\}$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}} \exp(K_H|z|^2\|\varphi\|^2)$$

dengan $c$ dan $K_H$ adalah konstanta dan $\|\cdot\|$ adalah norma kontinu pada $S(\mathbb{R})$ dengan definisi

$$\|\varphi\|^2 := |\varphi|_0^2 + \left(|\varphi|_\infty + |\varphi'|_\infty + |\varphi|_{L^1(\mathbb{R})}\right)^2, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

Di sini kita telah menggunakan Teorema 2. Karena $H \in (0,1)$ maka

$$C_1(t) := \frac{c}{\sqrt{4\pi(2-2^{2H-1})t^{2H}}} \in L^1[0,T]$$

sementara faktor $\exp(K_H|z|^2\|\varphi\|^2)$ konstan terhadap $t$. Dengan menggunakan Teorema 4 kita dapat menyimpulkan bahwa $\int_0^T \delta(x - X_t^H) \diamond W_t^H \, dt \in (S)'$. ■

## 4 Simpulan

Di dalam makalah ini teori analisis derau putih telah digunakan untuk membuktikan eksistensi arus stokastik tipe Wick dari gerak Brown subfraksional sebagai sebuah anggota di dalam ruang distribusi Hida. Penelitian selanjutnya adalah perumuman hasil ini ke ruang Euclide $\mathbb{R}^d$ dan perumuman hasil untuk kelas proses stokastik yang memuat gerak Brown subfraksional.

## 5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Sanata Dharma atas hibah penelitian skema internal reguler tahun 2020 di mana makalah ini menjadi salah satu luarannya.

## 6 Daftar Pustaka

[1] H. Federer, *Geometric Measure Theory*. Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2

[2] F. Morgan, *Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide*. Academic Press, 2016. https://doi.org/10.1016/C2015-0-01918-9

[3] F. Flandoli et al., "Stochastic Currents," *Stochastic Processes and Applications* , vol. 115, no. 9, pp. 1583–1601, 2005. https://doi.org/10.1016/j.spa.2005.04.007

[4] T. Bojdecki et al., "Sub-fractional Brownian Motion and Its Relation to Occupation Times," *Statistics and Probability Letters*, vol. 69, no. 4, pp. 405–419, 2004. https://doi.org/10.1016/j.spl.2004.06.035

[5] Y. Mishura and M. Zili, *Stochastic Analysis of Mixed Fractional Gaussian Processes*. ISTE Press, 2018. https://doi.org/10.1016/C2017-0-00186-6

[6] C. Tudor, "Some Properties of the Sub-fractional Brownian Motion," *Stochastics*, vol. 79, no. 5, pp. 431–448, 2007. https://doi.org/10.1080/17442500601100331

[7] H. Qi and L. Yan, "A Law of Iterated Logarithm for the Subfractional Brownian Motion and An Application," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2018, no. 96, pp. 1–18, 2018. https://doi.org/10.1186/s13660-018-1675-1

[8] L. Yan et al., "Ito's Formula for a the Sub-fractional Brownian Motion," *Communications on Stochastic Analysis*, vol. 5, no. 1, pp. 135–159, 2011. https://doi.org/10.31390/cosa.5.1.09

[9] G. Shen and C. Chen, "Stochastic Integration with respect to the Sub-fractional Brownian Motion with H $\in (0,\frac{1}{2})$," *Statistics and Probability Letters*, vol. 2012, no. 82, pp. 240–251, 2012. https://doi.org/10.1016/j.spl.2011.10.002

[10] I. Mendy, "On the Local Time of Sub-fractional Brownian Motion," *Annales Mathematiques Blaise Pascal*, vol. 17, no. 2, pp. 357–374, 2011. https://doi.org/10.5802/ambp.288

[11] J. Liu et al., "On the Self-intersection Local Time Subfractional Brownian Motion," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 414195, pp. 1–27, 2012. https://doi.org/10.1155/2012/414195

[12] H. P. Suryawan, "A White Noise Approach to Subfractional Brownian Motion," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2286, Article ID 020003, pp. 1–9, 2020. https://doi.org/10.1063/5.0029753

[13] F. Flandoli et al., "On The Regularity of Stochastic Currents, fractional Brownian Motion and Applications to a Turbulence Model," *Annales Henri Poincare*, vol. 45, no. 2, pp. 545–576, 2009. https://doi.org/10.1214/08-AIHP174

[14] F. Flandoli and C. Tudor, "Brownian and Fractional Brownian Stochastic Currents via Malliavin Calculus," *Journal of Functional Analysis*, vol. 258, no. 1, pp. 279–306, 2010. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.05.001

[15] T. Hida et al., *Lectures on White Noise Functionals*. World Scientific, 2008. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3680-0

[16] T. Hida and L. Streit, *Let Us Use White Noise*. World Scientific, 2017. https://doi.org/10.1201/9780203733813

[17] Z. Huang and J. Yan, *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis*. Kluwer Academic Publisher, 2000. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4108-6

[18] C. Bender, “An Ito Formula for Generalized Functionals of a Fractional Brownian Motion with Arbitrary Hurst Parameter,” *Stochastic Processes and Applications* , vol. 104, no. 1, pp. 81–106, 2003. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(02)00212-0

[19] Z. Wang and L. Yan, “The S-Transform of Sub-fBm and an Application to a Class of Linear Subfractional BSDEs,” *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2013, Article ID 827192, pp. 1–11, 2013. https://doi.org/10.1155/2013/827192

[20] Y. Kondratiev et al., “Generalized Functionals in Gaussian Spaces: The Characterization Theorem Revisited,” *Journal of Functional Analysis*, vol. 141, no. 2, pp. 301–318, 1996. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0130