Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 2, Juli 2023, 145-156
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i2.9063

Pembuktian Ukuran Kuantum dan Ukuran Possibility Sebagai Perumuman Ukuran yang Tidak Saling Memperumum

Miftahul Fikri[1]*
[1] Jl. Lingkar Luar Barat, Duri Kosambi, Cengkareng, Jakarta 11750
[1]Fakultas Ketenagalistrikan dan Energi Terbarukan IT-PLN Jakarta Indonesia
*e-mail: miftahul@itpln.ac.id

Diajukan: 23 April 2021, Diperbaiki: 3 Januari 2022, Diterima: 3 Maret 2023

Abstrak

Sejak Planck dan Zadeh masing-masing mengkaji teori kuantum dan teori possibility, kajian kedua teori ini terus dilakukan hingga sekarang. Dari sisi matematika, kedua teori ini yang berkaitan langsung dan menjadi dasar dalam berbagai kajian baik teoritis maupun aplikatif adalah ukuran kuantum dan ukuran possibility. Meskipun dalam banyak literatur ukuran kuantum dan ukuran possibility merupakan perumuman ukuran tetapi tidak dibuktikan berdasarkan definisi sehingga tidak nampak secara langsung substansi perumuman tersebut. Selain itu, dalam berbagai literatur juga tidak ditemukan pembahasan keterkaitan antara ukuran kuantum dan ukuran possibility. Oleh karena itu, pada penelitian ini dilakukan pembuktian berdasarkan definisi baik ukuran kuantum dan ukuran possibility merupakan perumuman ukuran maupun ukuran kuantum dan ukuran possibility tidak saling memperumum sehingga ukuran merupakan irisan keduanya.

Kata Kunci: ukuran, ukuran kuantum, ukuran possibility.

Abstract

Since Planck and Zadeh studied the quantum theory and the possibility theory respectively, studies of these two theories have continued to this day. From a mathematical perspective, these two theories that are directly related and become the basis for various studies both theoretical and applicable are the quantum measure and the possibility measure. Even though in much literature, the quantum measure and the possibility measure are generalizing the measure, they are not proven by definition so that the substance of generalizes does not appear directly. In addition, in various kinds of literature, there is also no discussion of the relationship between the quantum measure and the possibility measure. Therefore, this research proved base on the definition both the quantum measure and the possibility measure are a generalization of the measure as well as the quantum measure and the possibility measure does not generalize each other so that measure is an intersection of them.

Keywords: *measure, quantum measure, possibility measure.*

1 Pendahuluan

Sejak tahun 1900 ketika Max Planck menggunakan istilah kuantum untuk mengamati radiasi benda hitam ditemukan bahwa radiasi cahaya bukan berasal dari gelombang energi yang kontinu akan tetapi berasal dari kuanta-kuanta yang kecil yang dapat diukur [1] [2] [3]. Kemudian berkembang menjadi mekanika kuantum dan terus menarik minat para peneliti seperti Albert Einstein dengan teori relativitas khusus dan relativitas umum, De Broglie dengan dualisme gelombang, Schrodinger dengan fungsi gelombang partikel . Eksperimen tentang kuantum terkait teori ukur terus berkembang hingga memasuki tahun 1994, Sorkin [4] memformulasikan secara matematis mekanika kuantum sebagai teori ukur kuantum. Sorkin menghubungkan kuantum dengan sifat aditif peluang pada ruang ukur yang selanjutnya memperlihatkan bahwa secara matematis, fisika klasik merupakan kasus khusus dari fisika kuantum. Merujuk Sorkin tersebut, Gudder dalam [5] [6] membahas tentang teori ukur kuantum sebagai perumuman dari teori ukur. Perumaman ini bukan hanya memperumum teori ukur pada ruang ukur yang telah dikenal, tetapi juga dapat membatalkan teorema-teorema yang sudah dikenal luas, seperti teorema dasar kalkulus dan teorema Radon-Nikodym.

Disisi lain, himpunan fuzzy mulai dikenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965 [7], kemudian pada tahun 1978 [8] Zadeh memperkenalkan himpunan fuzzy sebagai basis dari teori possibility. Tahun 1982 [9], dibuktikan bahwa ukuran fuzzy dan possibility tidak sama, namun penelitian ini akan memfokuskan pada teori ukur possibility. Salah satu aplikasi teori ukur possibility adalah digunakan sebagai dasar untuk mengukur metode *clustering* seperti [10]–[13]. Dalam [8] [9], diketahui bahwa ukuran possibility merupakan perumuman ukuran, hal ini menyebabkan bukan hanya ukuran kuantum tetapi ukuran possibility juga merupakan perumuman ukuran. Meskipun dalam berbagai literatur disebutkan bahwa ukuran kuantum dan ukuran possibility merupakan perumuman ukuran tetapi tidak ditunjukkan berdasarkan definisinya sehingga tidak terlihat secara langsung perumumannya. Selain itu, dalam berbagai literatur juga tidak ditemukan pembahasan keterkaitan antara ukuran kuantum dan ukuran possibility. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas "pembuktian ukuran kuantum dan ukuran possibility sebagai perumuman ukuran yang tidak saling memperumum".

2 Metode Penelitian

Definisi 1 [[14][15]**]** *Suatu aljabar sigma himpunan-himpunan adalah suatu koleksi $\mathcal{S}$ dari subhimpunan-subhimpunan dari himpunan S yang diberikan sedemikian rupa sehingga*

1. $\emptyset,\ S \in \mathcal{S}$,
2. *Jika* $X \in \mathcal{S}$ *dan* $Y \in \mathcal{S}$, *maka* $X \cup Y \in \mathcal{S}$,
3. *Jika* $X \in \mathcal{S}$, *maka* $S - X \in \mathcal{S}$,
4. *Jika* $X_n \in \mathcal{S}$ *untuk semua* n, *maka* $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in \mathcal{S}$.

Definisi 2 [[16]**]** *Ruang terukur adalah sepasang* $(X, \mathcal{M})$, *di mana* X *adalah suatu himpunan dan* $\mathcal{M}$ *adalah suatu aljabar-*σ *dari himpunan bagian-himpunan bagian* X. *Ukuran* μ *di dalam ruang* *terukur* $(X, \mathcal{M})$ *adalah fungsi taknegatif* $\mu: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *dimana* $\mu(\emptyset) = 0$ *dan countable additive, yaitu untuk sembarang koleksi himpunan terukur terhitung yang saling lepas* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *memenuhi,*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Definisi 3 [[16]**]** *Ruang ukur adalah rangkap tiga* $(X, \mathcal{M}, \mu)$*, di mana* $(X, \mathcal{M})$ *adalah ruang terukur dan* μ *adalah ukuran di dalam ruang terukur* $(X, \mathcal{M})$*.*

Definisi 4 [[6] [5]**]** *Misalkan* $(X, \mathcal{M})$ *merupakan ruang terukur. Suatu fungsi* $\mu: \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *adalah ukuran kuantum jika:*

1. $\lim \mu(A_i) = \mu(\cup A_i)$, *untuk setiap barisan naik* $A_i \in \mathcal{M}$ *dan* $\lim \mu(B_i) = \mu(\cap B_i)$, *untuk setiap barisan turun* $B_i \in \mathcal{M}$ *(kontinu),*
2. $\mu(A \uplus B \uplus C) = \mu(A \uplus B) + \mu(A \uplus C) + \mu(B \uplus C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C)$ *(grade-2 additive),*
3. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A \uplus B) = \mu(B)$ *dan* $\mu(A \uplus B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$ *(regular).*

Definisi 5 [[9] [8]] *Misalkan* $(X, \mathcal{M})$ *merupakan ruang terukur.* Suatu ukuran possibility adalah fungsi $\mu: \mathcal{M} \to [0,1]$ yang memenuhi:

1. $\mu(\emptyset) = 0$, (kosong)
2. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$, untuk $A, B \in \mathcal{M}$, (monoton)
3. $\mu(\cup A_i) = \sup_i \mu(A_i)$, untuk setiap $A_i \in \mathcal{M}$. (supremum)

Definisi 6 [[16]**]**

Misalkan E himpunan bilangan Real, tetapkan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ sebagai himpunan buka tak kosong, interval terbatas yang mengcover E. Outer measure dari E dilambangkan dengan $m^*(E)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Misalkan E himpunan yang terukur, ukuran Lebesgue dilambangkan dengan $m(E)$ yang didefinisikan oleh $m(E) = m^*(E)$.

Teorema 7 [[16]**]** *Ukuran* μ *(termasuk ukuran Lebesgue) memenuhi sifat kekontinuan berikut:*

1. *Jika* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *adalah koleksi dari himpunan terukur yang naik maka*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) \qquad (1)$$

2. *Jika* $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ *adalah koleksi dari himpunan terukur yang turun dan* $\mu(B_1) < \infty$ *maka*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i). \tag{2}$$

3 Hasil dan Pembahasan

Pada penelitiain ini akan membuktikan keterkaitan ukuran, ukuran kuantum dan ukuran possibility yang dikelompokkan pembahasannya sebagai berikut:

1. Pembuktian Ukuran Kuantum dan Ukuran Possibility Sebagai Perumuman Ukuran,
2. Pembuktian Ukuran Kuantum Bukan Perumuman Ukuran Possibility,
3. Pembuktian Ukuran Possibility Bukan Perumuman Ukuran Kuantum.

Masing-masing akan dibahas sebagai berikut:

3.1 Pembuktian Ukuran Kuantum dan Ukuran Possibility Sebagai Perumuman Ukuran

a. Pembuktian Ukuran Kuantum Sebagai Perumuman Ukuran

   Andaikan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ruang ukur. Pembuktian akan dilakukan dengan cara menunjukkan bahwa μ merupakan ukuran kuantum, yaitu kontinu(1), grade-2 additive(2) dan regular(3).

   1. Kontinu

      Berdasarkan Teorema 1, μ kontinu.

   2. Grade-2 additive

      $$\mu(A \uplus B \uplus C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) \tag{3}$$

      $$\begin{aligned}\mu(A \uplus B) + \mu(A \uplus C) + \mu(B \uplus C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\ = \mu(A) + \mu(B) + \mu(A) + \mu(C) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A) - \mu(B) - \mu(C) \\ = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C)\end{aligned} \tag{4}$$

      Berdasarkan (3) dan (4) maka μ grade-2 additive.

   3. Regular

      Andaikan $\mu(A) = 0$, maka $\mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B) = 0 + \mu(B) = \mu(B)$.

      Andaikan $\mu(A \uplus B) = 0$, maka $\mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B) = 0$, dengan $\mu(A) \geq 0$ dan $\mu(B) \geq 0$, sehingga $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Akibatnya μ regular.

   Sehingga terbukti bahwa μ merupakan ukuran kuantum.

b. Pembuktian Ukuran Possibility Sebagai Perumuman Ukuran

   Andaikan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ruang ukur. Pembuktian akan dilakukan dengan cara menunjukkan bahwa μ merupakan ukuran possibility, yaitu kosong (1) dan monoton (2), supremum (3).

   1. Kosong

      Sesuai definisi ukuran, memenuhi $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Monoton

   Andaikan $A \subset B$. Kasus khusus countable aditif pada ukuran adalah aditif berhingga yang diperoleh dengan cara mengambil beberapa himpunan terakhir pada operasi gabungan countable aditif sebagai $\emptyset$. Akibatnya ketika $A \subset B$ maka $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \sim A)$, sehingga $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Supremum

   Berdasarkan Teorema 1 dan sifat monoton possibility maka akan memenuhi sifat supremum.

Sehingga terbukti bahwa μ merupakan ukuran possibility.

3.2 Pembuktian Ukuran Kuantum Bukan Perumuman Ukuran Possibility

Pembuktian akan dilakukan dengan counter example berikut. Misalkan $X = [0,1]$, $\mathcal{M}$ aljabar sigma dari X dan v ukuran Lebesgue yang dibatasi pada $[0,1]$. Untuk $E \in \mathcal{M}$, ukuran μ didefinisikan:

$$\mu(E) = v(E) - 2v\left(\left\{x \in E : x + \frac{3}{4} \in E\right\}\right) = v(E) - 2v\left(E \cap \left(E - \frac{3}{4}\right)\right)$$

Akan dibuktikan bahwa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merupakan ruang ukur kuantum yaitu μ memenuhi kontinu (1), grade-2 additive (2) dan regular (3), tetapi μ bukan merupakan ukuran possibility(4).

1. Kontinu

   Misalkan A_i barisan naik di $\mathcal{M}$, maka

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= v\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - 2v\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - \frac{3}{4}\right)\right)\\ &= v\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - 2v\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_i \bigcap \left(A_i - \frac{3}{4}\right)\right)\right)\\ &= \lim_{i\to\infty} v(A_i) - 2\lim_{i\to\infty} v\left(A_i \bigcap \left(A_i - \frac{3}{4}\right)\right) && \text{berdasarkan persamaan (1)}\\ &= \lim_{i\to\infty}\left(v(A_i) - 2v\left(A_i \bigcap \left(A_i - \frac{3}{4}\right)\right)\right)\\ &= \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).\end{aligned}$$

   Kemudian, misalkan B_i barisan turun di $\mathcal{M}$ dan diketahui bahwa $\mu(B_1) < 1 < \infty$ maka

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= v\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) - 2v\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i - \frac{3}{4}\right)\right)\\ &= \lim_{i\to\infty} v(B_i) - 2\lim_{i\to\infty} v\left(B_i \bigcap \left(B_i - \frac{3}{4}\right)\right) && \text{berdasrkan persamaan (2)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(v(B_i) - 2v\left(B_i \bigcap \left(B_i - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$
$$= \lim_{i\to\infty}\mu(B_i).$$

2. Grade-2 additive

   Untuk membuktikan grade-2 additive, akan dibuktikan $\mu(E_1 \uplus E_2 \uplus E_3) = \mu(E_1 \uplus E_2\,) + \mu(E_1 \uplus E_3) + \mu(E_2 \uplus E_3) - \mu(E_1) - \mu(E_2) - \mu(E_3)$. Karena v ukuran Lebesgue bersifat additive maka $v(E_1 \uplus E_2) = v(E_1) + v(E_2)$, sehingga diperoleh

$$\mu\left(E_1 \biguplus E_2\right) = v(E_1) + v(E_2) - 2v\left(\left\{x \in E_1 \biguplus E_2 : x + \frac{3}{4} \in E_1 \biguplus E_2\right\}\right)$$
$$= v(E_1) + v(E_2) - 2v\left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right).$$

   Selanjutnya,

$$\mu(E_1 \uplus E_2\,) + \mu(E_1 \uplus E_3) + \mu(E_2 \uplus E_3) - \mu(E_1) - \mu(E_2) - \mu(E_3)$$
$$= v(E_1) + v(E_2) - 2v\left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right) + v(E_1) + v(E_3)$$
$$- 2v\left(\left(E_1 \biguplus E_3\right) \cap \left(\left(E_1 \biguplus E_3\right) - \frac{3}{4}\right)\right) + v(E_2) + v(E_3)$$
$$- 2v\left(\left(E_2 \biguplus E_3\right) \cap \left(\left(E_2 \biguplus E_3\right) - \frac{3}{4}\right)\right) - v(E_1) + 2v\left(E_1 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$- v(E_2) + 2v\left(E_2 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right) - v(E_3) + 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$= v(E_1) + v(E_2) - 2v\left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right) + v(E_1) + v(E_3)$$
$$- 2v\left(\left(E_1 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_1 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_3 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_3\right.\right.$$
$$\left.\left.\cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)\right) + v(E_2) + v(E_3)$$
$$- 2v\left(\left(E_2 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_2 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_3 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_3\right.\right.$$
$$\left.\left.\cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)\right) - v(E_1) + 2v\left(E_1 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) - v(E_2)$$
$$+ 2v\left(E_2 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right) - v(E_3) + 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= v(E_1) + v(E_2) - 2v\left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right) + v(E_1) + v(E_3)$$

$$- 2v\left(E_1 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_1 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) + v(E_2) + v(E_3) - 2v\left(E_2 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(E_2 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- v(E_1) + 2v\left(E_1 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) - v(E_2) + 2v\left(E_2 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right) - v(E_3)$$

$$+ 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= v(E_1) + v(E_2) + v(E_3) - 2v\left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(E_1 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(E_2 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right). \tag{5}$$

Disisi lain,

$$\mu(E_1 \uplus E_2 \uplus E_3) = \mu\big((E_1 \uplus E_2) \uplus E_3\big)$$

$$= v(E_1 \uplus E_2) + v(E_3) - 2v\left(((E_1 \uplus E_2) \uplus E_3) \cap \left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_3\right) - \frac{3}{4}\right)$$

$$= v(E_1) + v(E_2) + v(E_3) - 2v\left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(\left(E_1 \bigcup\!\!\!\!\cdot\;\, E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= v(E_1) + v(E_2) + v(E_3) - 2v\left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$- 2v\left(\left(E_1 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_2 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$
$$- 2v\left(\left(E_3 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(E_3 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$
$$- 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$= v(E_1) + v(E_2) + v(E_3) - 2v\left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) \cap \left(\left(E_1 \biguplus E_2\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$- 2v\left(E_1 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_2 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$- 2v\left(E_3 \cap \left(E_1 - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(E_3 \cap \left(E_2 - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$- 2v\left(E_3 \cap \left(E_3 - \frac{3}{4}\right)\right). \tag{6}$$

Akibatnya berdasarkan (5) dan (6) maka $\mu(E_1 \uplus E_2 \uplus E_3) = \mu(E_1 \uplus E_2) + \mu(E_1 \uplus E_3) + \mu(E_2 \uplus E_3) - \mu(E_1) - \mu(E_2) - \mu(E_3)$, Sehingga μ grade-2 additive.

3. Regular

Akan dibuktikan $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A \uplus B) = \mu(B)$ dan $\mu(A \uplus B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$.

Pertama, andaikan $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow v(A) - 2v\left(A \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow v(A) = 2v\left(A \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) \Leftrightarrow A = \emptyset$ atau $A = C \uplus \left(C - \frac{3}{4}\right)$ untuk sembarang $C \subseteq \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Untuk $A = \emptyset$ maka diperoleh $\mu(A \uplus B) = \mu(B)$. Untuk $A = C \uplus \left(C - \frac{3}{4}\right)$ dengan $C \subseteq \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ sembarang dan diketahui bahwa $A \cap B = \emptyset$ sehingga akan diperoleh dua persamaan berikut:

$$C \cap B = \emptyset, \tag{7}$$

dan

$$\left(C - \frac{3}{4}\right) \cap B = \emptyset. \tag{8}$$

$$\mu(A \uplus B) = v(A \uplus B) - 2v\left((A \uplus B) \cap \left((A \uplus B) - \frac{3}{4}\right)\right)$$
$$= v(A) + v(B) - 2v\left(\left(A \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(B \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$

$$= v(A) + v(B) - 2v\left(A \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(\left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$

$$- 2v\left(B \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= 0 + v(B) - 2v\left(B \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(\left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$

$$= \mu(B) - 2v\left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= \mu(B) - 2v\left(\left(C \uplus \left(C - \frac{3}{4}\right)\right) \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(B \cap \left(\left(C \uplus \left(C - \frac{3}{4}\right)\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= \mu(B) - 2v\left(\left(C \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(\left(C - \frac{3}{4}\right) \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$

$$- 2v\left(B \cap \left(\left(C - \frac{3}{4}\right) \uplus \left(C - \frac{6}{4}\right)\right)\right)$$

$$= \mu(B) - 2v\left(\left(C \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left((C \cap B) - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(B \cap \left(C - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$= \mu(B) - 2v\left(\left(C \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \biguplus \emptyset\right) - 2v(\emptyset) \qquad \text{(berdasarkan pers. (7) dan (8))}$$

$$= \mu(B) - 2v\left(C \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right).$$

Karena $C \subseteq \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ dan $\left(B - \frac{3}{4}\right) \subseteq \left[0, \frac{1}{4}\right]$ maka $C \cap \left(B - \frac{3}{4}\right) = \emptyset$ sehingga $\mu(A \uplus B) = \mu(B)$.

Kedua, andaikan $\mu(A \uplus B\ ) = 0$ maka

$$\mu\left(A \biguplus B\right) = 0 \Leftrightarrow v(A \uplus B) - 2v\left(\left(A \biguplus B\right) \cap \left(\left(A \biguplus B\right) - \frac{3}{4}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow v(A \uplus B) = 2v\left(\left(A \biguplus B\right) \cap \left(\left(A \biguplus B\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow v(A) + v(B) = 2v\left(\left(A \biguplus B\right) \cap \left(\left(A \biguplus B\right) - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow A \uplus B = \emptyset \text{ atau } A \uplus B = C \uplus \left(C - \frac{3}{4}\right) \text{ untuk sembarang } C \subseteq \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Untuk $A \uplus B = \emptyset$ maka $A = \emptyset$ dan $B = \emptyset$ sehingga $\mu(A\ ) = \mu(B)$. Selain itu, untuk $A \uplus B = C \uplus \left(C - \frac{3}{4}\right)$ untuk sembarang $C \subseteq \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ akan diperoleh

$$\mu\left(A \biguplus B\right) = 0 \Leftrightarrow v(A) + v(B) - 2v\left(\left(A \biguplus B\right) \cap \left(\left(A \biguplus B\right) - \frac{3}{4}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow v(A) + v(B) - 2v\left(A \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right)$$

$$- 2v\left(\left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) \uplus \left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right)\right)$$

$$- 2v\left(B \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(A) + \mu(B) - 2v\left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) - 2v\left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) = 0. \quad (9)$$

Karena $\mu(A \uplus B\ ) = 0$ maka diperoleh $v\left((A\ \uplus B) \cap \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = 0$ dan $A \cap B$ sehingga dari persamaan (9) diperoleh

$$\mu(A) = v\left(A \cap \left(B - \frac{3}{4}\right)\right) + v\left(\left(A - \frac{3}{4}\right) \cap B\right) = v\left(\left(B - \frac{3}{4}\right) \cap A\right) + v\left(B \cap \left(A - \frac{3}{4}\right)\right) = \mu(B).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merupakan ruang ukur kuantum.

4. Bukan Ukuran Possibility

$\mu\left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \uplus \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) = 0$ sedangkan $\mu\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = \frac{1}{4}$ sehingga tidak memenuhi sifat monoton, akibatnya μ bukan merupakan ukuran possibility.

Sehingga terbukti bahwa ukuran kuantum bukan merupakan perumuman ukuran possibility.

3.3 Pembuktian Ukuran Possibility Bukan Perumuman Ukuran Kuantum

Misalkan $X = [0,1]$, ukuran μ di X didefinisikan sebagai berikut (Puri, 1982):

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merupakan ruang ukur possibility yaitu μ memenuhi ukuran possibility (1), tetapi μ bukan merupakan ruang ukur kuantum (2).

1. Ukuran Possibility
   Berdasarkan [9], telah dibuktikan bahwa μ merupakan ukuran possibility.

2. Bukan Ukuran Kuantum
   Misalkan $A_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$. Sehingga diperoleh

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0, \quad (10)$$

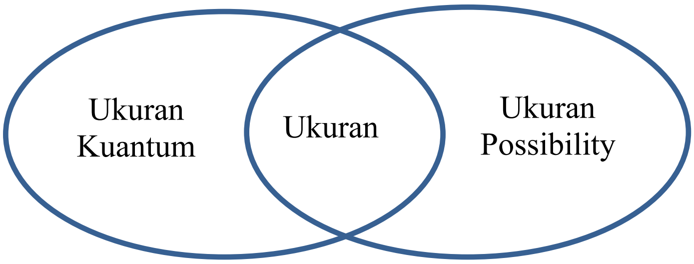
sedangkan

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = 1. \quad (11)$$

Persamaan (10) dan (11) menunjukkan bahwa μ tidak memenuhi sifat kontinu. Akibatnya μ bukan merupakan ukuran kuantum.

Sehingga terbukti bahwa ukuran possibility bukan merupakan perumuman ukuran kuantum.

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 1. Keterkaitan Ukuran, Ukuran Possibility dan Ukuran Kuantum

4 Simpulan

Pada penelitian ini membahas pembuktian keterkaitan ukuran, ukuran possibility dan ukuran kuantum. Adapun hasil yang diperoleh sebagai berikut:

1. Ukuran kuantum dan ukuran possibility terbukti merupakan perumuman ukuran,
2. Ukuran kuantum terbukti bukan merupakan perumuman ukuran possibility,
3. Ukuran possibility terbukti bukan merupakan perumuman ukuran kuantum.

5 Daftar Pustaka

[1] Reza A.A Wattimena, *Philosophy and Science*. Jakarta: Grasindo, 2008.

[2] G. E. Marsh, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics for the Non-Specialist*. World Scientific, 2018.

[3] D. ter Haar, "On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum," *Pergamon Press*, p. 82, 1967.

[4] R. D. Sorkin, "QUANTUM MECHANICS AS QUANTUM MEASURE THEORY," *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 9, no. 33, pp. 3119–3127, 1994.

[5] S. Gudder, "Quantum measure and integration theory," *J. Math. Phys.*, vol. 50, 2009.

[6] S. Gudder, "Quantum Measure Theory," *Math. Slovaca*, vol. 60, no. 5, pp. 681–700, 2010.

[7] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," *Inf. Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[8] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets As A Basis For A Theory Of Possibility," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 1, pp. 3–28, 1978.

[9] M. L. Puri and D. Ralescu, "A Possibility Measure is Not a Fuzzy Measure," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 7, pp. 311–313, 1982.

[10] O. Ozdemir and A. Kaya, "Comparison of FCM, PCM, FPCM and PFCM Algorithms in

Clustering Methods," *J. Sci. Eng.*, vol. 19, no. 1, pp. 92–102, 2019.

[11] S. Askari, N. Montazerin, M. H. F. Zarandi, and E. Hakimi, "Generalized entropy based possibilistic fuzzy C-Means for clustering noisy data and its convergence proof," *Neurocomputing*, vol. 219, pp. 186–202, 2017.

[12] N. R. Pal, K. Pal, J. M. Keller, and J. C. Bezdek, "A Possibilistic Fuzzy c-Means Clustering Algorithm," *IEEE Trans. FUZZY Syst.*, vol. 13, no. 4, pp. 517–530, 2005.

[13] N. R. Pal, K. Pal, and J. C. Bezdek, "Mixed c-Means Clustering Model," in *Proceedings of 6th International Fuzzy Systems Conference*, 1997, pp. 11–21.

[14] T. Jech, *Set Theory*. Springer, 2006.

[15] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, vol. I. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[16] H. L. Royden. and P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*. Prentice Hall, 2010.