

Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segi Tiga Paku

Kurniawan Atmadja^{1*}, Miftahul Fikri²

¹JI Moh Kahfi II Srengseng Sawah Jagakarsa, Jakarta Selatan 12640

²JI Lingkar Luar Barat Duri Kosambi Cengkareng, Jakarta Barat 11750

¹Program Studi Matematika ISTN Jakarta Indonesia

²Fakultas Ketenagalistrikan dan Energi Terbarukan IT-PLN Jakarta Indonesia

*e-mail: kurniawan_atmadja@istn.ac.id

Diajukan: 25 April 2021, Diperbaiki: 23 Desember 2022, Diterima: 7 Maret 2023

Abstrak

Graf $G(V, E)$ dapat ditulis G , yaitu himpunan tak kosong simpul (*vertex*) V dan himpunan sisi (*edge*) E . Pada graf G diketahui jumlah simpul dan jumlah sisi yang masing - masing dinotasikan dengan $|V|$, dan $|E|$. Graf G yang diberi label harmonis selalu mensyaratkan jumlah simpul tidak melebihi jumlah sisi. Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ yang membangkitkan fungsi bijektif f^* dari himpunan sisi ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y) \pmod{|E|}$ yang menghasilkan label sisi yang berbeda. Kajian penelitian ini bertujuan untuk menambah koleksi graf harmonis dalam bidang Matematika kombinatorik, khususnya berkaitan dengan penelitian graf tangga segitiga paku yang berkelanjutan. Graf tangga segitiga paku diperoleh dari hasil graf tangga segitiga LS_n yang mengalami tambahan satu simpul dan dua sisi. Kemudian dikonstruksi menyusun dan berbaris, sehingga mendapatkan hasil sebuah graf baru yang berbentuk seperti paku yang bersusun, terhubung dan berbaris. Lalu diberi label pada simpul dan sisi. Telah diketahui bahwa graf tangga segitiga LS_n adalah graf harmonis. Pada paper ini ditunjukkan bahwa graf tangga segitiga paku juga merupakan graf harmonis.

Kata Kunci: graf tangga segitiga paku, fungsi bijektif, graf tangga segitiga LS_n , pelabelan graf, pelabelan harmonis.

Abstract

Graphs can be written, i.e. the set of empty vertices and edge sets. In graphs are known the number of vertices and the number of edges each notified with and Graphs labeled harmoniously always require the number of vertices not exceed the number of edges. Harmonious labeling is an injective function from a set of vertices to a set of modulo $|E|$ integers that evokes a bijective function from a set of edges to a set of modulo $|E|$ integers with which different edge labels are generated $f^(xy) = f(x) + f(y) \pmod{|E|}$. This research study is aimed at adding to the collection of harmonious graphs in the field of combinatoric mathematics, especially with regard to the continuous research of triangular ladder graphs. The nail triangle ladder graph is obtained from the graph of the triangular ladder which undergoes an additional one vertex and two edges. Then constructed composing and marching, so as to get the result of a new graph shaped like nails arranged, connected and lined. LS_n Then it is labeled on vertices and edges. It is known that triangular ladder graphs are harmonious graphs. In this paper it is shown that the graph of the nail triangle ladder is also a harmonious graph LS_n .*

Keywords: nail triangle ladder graph, bijective function, triangular ladder graph LS_n , graph labeling, harmonious labeling

1 Pendahuluan

Misalkan graf $G = (V, E)$, dapat disingkat G adalah graf yang terdiri dari himpunan simpul tak kosong V , dan himpunan sisi E . Notasi $|V|$ dan $|E|$ masing – masing menyatakan banyak simpul V dan banyak sisi E . Jika pada Graf G diberi label harmonis, dan dipenuhi syarat $|E| \geq |V|$, maka grafnya merupakan graf harmonis. Pelabelan harmonis dikenalkan pertama kali oleh Graham dan Sloan, berawal dari kasus error-correcting code. Pelabelan harmonis didefinisikan sebagai suatu pemetaan injektif dari $V(G)$ ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ yang membangkitkan fungsi bijektif f^* dari himpunan sisi ke himpunan bulat modulo $|E|$, sedemikian sehingga ketika setiap sisi xy diberi label $f^*(xy) = f(x) + f(y)$, menghasilkan label sisi yang berbeda. Beberapa kelas graf dari hasil temuan telah diklasifikasikan sebagai katagori graf harmonis. Di antara temuan yang telah diperoleh, hasilnya telah dimuat dalam penelitian sebelumnya, antara lain pelabelan graf harmonis [1], indeks harmonis dan bilangan kromatik suatu graf [2], tindakan kelompok harmonis maksimal pada graf terbatas [3], indeks harmonis operasi graf [4], invers jumlah indeg indeks graf [5], hasil baru pada graf rata-rata harmonis [6], mencapai kerataan: pelabelan graf dapat menghasilkan kata-kata madu grafis [7], pelabelan harmonis yang lemah pada graf dan multigraf [8], indeks harmonis graf garis [9], analisis harmonis pada graf terarah dan aplikasi: Dari analisis Fourier ke wavelet [10], pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga[11], pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga variasi, pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga ganda[12], pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga jembatan[13], pelabelan harmonis graf tangga segiempat variasi[14]. Kini kajian berlanjut pada temuan graf terbaru, yaitu kajian pelabelan harmonis pada graf tangga segitiga paku. Dilekatkan sebutan paku karena bentuk temuan graf seperti paku berbaris, dan ditunjukkan sebagai graf harmonis. Tujuan penelitian ini adalah memperkaya perbendaharaan keilmuan dalam bidang Matematika kombinatorik, khususnya berkaitan dengan pelabelan graf harmonis. Pelabelan harmonis dapat dilihat lebih lengkap melalui Gallian survei [15].

2 Metode Penelitian

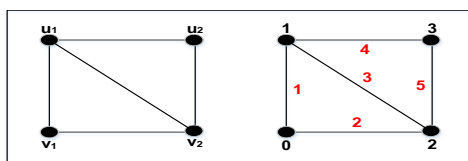
Graf tangga segitiga $LS_n (n \geq 2)$ [11], menjadi inspirasi pada penelitian ini. Metode penelitian meliputi langkah langkah sebagai berikut : 1. Melakukan kajian terhadap graf tangga segitiga LS_n . 2. Menambahkan satu simpul dan dua sisi. 3. Mengkonstruksi dengan menyusun, dan menghubungkan berbaris 4. Melabelkan simpul dan sisi pada graf yang diperoleh. 5. Melakukan pembuktian formal sesuai syarat dan konsep pelabelan graf harmonis.

Definisi 1 Graf tangga segitiga paku $G(V, E)$ dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_i, w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{u_i w_i, w_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup$

$\{w_i w_{i+1}, w_i v_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i w_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$. Berikut dibahas teorema dan pembuktian pada hasil kajian temuan graf tangga segitiga paku di bawah ini.

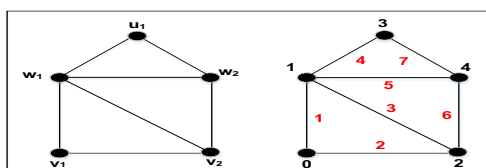
3 Hasil dan Pembahasan

Diberikan bangunan graf tangga segitiga $LS_n (n \geq 2)$, di mana $p = 2n$ dan $q = 4n - 3$. Jika $|v| = p$ dan $|E| = q$, bila mengambil $n = 2$, maka banyak simpul $p = 4$ yaitu (u_1, u_2, u_3, u_4) , dan banyak sisi $q = 5$ yaitu $(u_1 u_2, u_1 v_1, u_1 v_2, v_1 v_2, u_2 v_2)$. Lebih konkrit diberikan graf tangga segitiga untuk $n = 2$ pada Gambar 1 sebagai berikut :



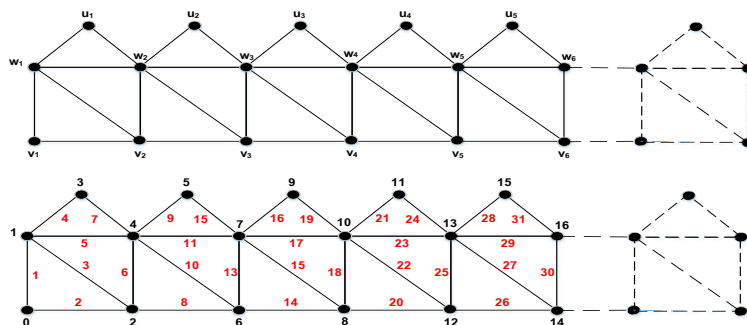
Gambar 1. Graf tangga segitiga LS_n

Pada Gambar 2 di bawah ini adalah konstruksi graf tangga segitiga paku, di mana $p = 3n - 1$ dan $q = 6n - 5$, untuk $n = 2$ sebagai berikut :



Gambar 2. Graf tangga segitiga paku

Sesuai langkah – langkah pada metode penelitian ini, berikut disajikan graf tangga segitiga paku yang dikonstruksi bersusun dan berbaris. Hasil konstruksinya berikut pelabelannya dapat dilihat pada Gambar 3 di bawah ini.



Gambar 3. Graf tangga segitiga paku

Berikut dibahas teorema dan pembuktian pada hasil kajian temuan graf tangga segitiga paku yang terangkum di bawah ini.

Teorema 2 Graf tangga segitiga paku $G(V, E)$ untuk $n \geq 2$ adalah harmonis.

Bukti Misalkan himpunan simpul $V(G) = \{v_i, w_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n-1\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{u_i w_i, w_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}, w_i v_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$.

Definisikan pelabelan simpul $f: V \rightarrow \mathbb{Z}_{|E|}$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i & ; i \text{ ganjil} \\ 3i - 1 & ; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(u_i) \in \{3, 5, 9, 11, 15, 17, 21, 23, 27, \dots\}$$

$$\subseteq (3 \bmod 6) \cup (5 \bmod 6) = \bar{3} \cup \bar{5} \quad (1)$$

$$f(w_i) = 3i - 2 ; 1 \leq i \leq n$$

$$\in \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots\}$$

$$\subseteq (1 \bmod 6) \cup (4 \bmod 6) = \bar{1} \cup \bar{4} \quad (2)$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 3i - 3 & ; i \text{ ganjil} \\ 3i - 4 & ; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\in \{0, 2, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, \dots\}$$

$$\subseteq (0 \bmod 6) \cup (2 \bmod 6) = \bar{0} \cup \bar{2} \quad (3)$$

Persamaan (1) sampai dengan Persamaan (3) dapat pula ditulis dengan mendaftarkan anggota dari himpunan simpulnya sebagai berikut : $f(V(G)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \dots, 3n\}$. Dari daftar anggota himpunan simpul, nampak anggota label simpul terkecil terletak pada label simpul $v_1 = 0$. Sedangkan untuk anggota label simpul terbesar terletak pada label simpul u_n , di mana $f(u_n) = 3n$. Keanggotaan himpunan label simpul, merupakan sekumpulan bilangan bulat. Hal ini sesuai definisi pelabelan simpul $f: V \rightarrow \mathbb{Z}_{|E|}$. f adalah fungsi injektif. Sehingga memenuhi sebuah pemetaan dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat.

Pelabelan f akan menginduksi pelabelan sisi sebagai berikut :

$$f^*(u_i w_i) = \begin{cases} f(u_i) + f(w_i) = 3i + 3i - 2 = 6i - 2 ; & i \text{ ganjil} \\ f(u_i) + f(w_i) = 3i - 1 + 3i - 2 = 6i - 3 ; & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\in \{4, 9, 16, 21, 28, 33, 40, 45, 52, \dots\}$$

$$\subseteq (4 \bmod 12) \cup (9 \bmod 12) = \bar{4} \cup \bar{9} \quad (4)$$

$$f^*(u_i w_{i+1}) = \begin{cases} f(u_i) + f(w_{i+1}) = 3i + 3(i+1) - 2 = 6i + 1 ; & i \text{ ganjil} \\ f(u_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 1 + 3(i+1) - 2 = 6i ; & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\in \{7, 12, 19, 24, 31, 36, 43, 48, 55, \dots\}$$

$$\subseteq (7 \bmod 12) \cup (0 \bmod 12) = \bar{7} \cup \bar{0} \quad (5)$$

$$f^*(w_i v_i) = \begin{cases} f(w_i) + f(v_i) = 3i - 2 + 3i - 3 = 6i - 5 ; & i \text{ ganjil} \\ f(w_i) + f(v_i) = 3i - 2 + 3i - 4 = 6i - 6 ; & i \text{ genap} \end{cases}$$

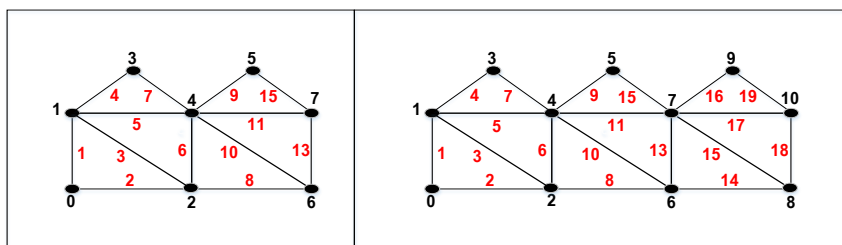
$$\begin{aligned} &\in \{1, 6, 13, 18, 25, 30, 37, 42, 49, \dots\} \\ &\subseteq (1 \bmod 12) \cup (6 \bmod 12) = \bar{1} \cup \bar{6} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f^*(w_i w_{i+1}) &= f(w_i) + f(w_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i + 1) - 2 = 6i - 1 \\ &\in \{5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, \dots\} \\ &\subseteq (5 \bmod 12) \cup (11 \bmod 12) = \bar{5} \cup \bar{11} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} f^*(w_i v_{i+1}) &= \begin{cases} f(w_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i + 1) - 4 = 6i - 3; & i \text{ ganjil} \\ f(w_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 2 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 2; & i \text{ genap} \end{cases} \\ &\in \{3, 10, 15, 22, 27, 34, 39, 46, 51, \dots\} \\ &\subseteq (3 \bmod 12) \cup (10 \bmod 12) = \bar{3} \cup \bar{10} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= \begin{cases} f(v_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 3 + 3(i + 1) - 4 = 6i - 4; & i \text{ ganjil} \\ f(v_i) + f(v_{i+1}) = 3i - 4 + 3(i + 1) - 3 = 6i - 4; & i \text{ genap} \end{cases} \\ f^*(v_i v_{i+1}) &= 6i - 4 \\ &\in \{2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, \dots\} \\ &\subseteq (2 \bmod 12) \cup (8 \bmod 12) = \bar{2} \cup \bar{8} \end{aligned} \tag{9}$$

Persamaan (4) sampai dengan (9) bisa ditulis sebagai himpunan anggota sisi $f^*(E(G)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots, 6n\}$. Nampak setiap anggota sisi xy yang diberi label mengikuti pelabelan sisi $f^*(xy) = (f(x) + f(y)) \bmod |E|$ menghasilkan label sisi berbeda. Banyak sisi $|E|$, dan label sisi yang dihasilkan adalah $1, 2, 3, \dots, |E|$, menunjukkan pelabelan sisi yang bijektif. Maka terbukti graf tangga segitiga paku adalah graf harmonis. Dengan demikian perbendaharaan pustaka keilmuan sub bidang graf melalui kajian penelitian ini, kian memberikan nilai tambah bagi perkembangan Pustaka Matematika kombinatorik (Graf). Melengkapi hasil dan pembahasan, pada makalah ini ditampilkan contoh graf tangga segitiga paku di mana $p = 3n - 1$ dan $q = 6n - 5$. Jika dipilih $n = 3$ maka $p = 8$, dan $q = 13$. Begitupun jika dipilih $n = 4$ maka $p = 11$, dan $q = 19$. Berturut turut diberikan graf tangga segitiga paku berikut pelabelannya untuk $n = 3$, dan $q = 4$ yang disajikan pada Gambar 4 berikut ini :



Gambar 4. Graf tangga segitiga paku untuk $n = 3$ dan $n = 4$

4 Simpulan

Graf tangga segitiga paku adalah perluasan dari hasil kajian graf tangga segitiga LS_n ($n \geq 2$). Graf tangga segitiga yang diberi label harmonis dan merupakan graf harmonis. Berdasarkan hasil kajian penelitian, dapat disimpulkan :

1. Graf tangga segitiga paku untuk $n \geq 2$ merupakan generalisasi dari graf tangga segitiga LS_n .
2. Graf tangga segitiga paku untuk $n \geq 2$ adalah graf harmonis.

5 Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada ibu Dr. Kiki A Sugeng, M.Si yang telah membimbing saya dalam melakukan penelitian Matematika Kombinatorik bidang pelabelan graf.

6 Daftar Pustaka

- [1] I. Benjamini, V. Cyr, E. B. Procaccia, and R. J. Tessler, "Harmonic labeling of graphs," *Discrete Math.*, vol. 313, no. 17, pp. 1726–1745, 2013, doi: 10.1016/j.disc.2013.04.022.
- [2] H. Deng, S. Balachandran, S. K. Ayyaswamy, and Y. B. Venkatakrisnan, "On the harmonic index and the chromatic number of a graph," *Discret. Appl. Math.*, vol. 161, no. 16–17, pp. 2740–2744, 2013, doi: 10.1016/j.dam.2013.04.003.
- [3] S. Corry, "Maximal harmonic group actions on finite graphs," *Discrete Math.*, vol. 338, no. 5, pp. 784–792, 2015, doi: 10.1016/j.disc.2014.12.016.
- [4] R. Rasi, "On the harmonic index of bicyclic graphs," *Commun. Comb. Optim.*, vol. 3, no. 2, pp. 121–142, 2018, doi: 10.22049/CCO.2018.26171.1081.
- [5] K. Pattabiraman, "Inverse sum indeg index of graphs," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, vol. 15, no. 2, pp. 155–167, 2018, doi: 10.1016/j.akcej.2017.06.001.
- [6] S. Meena and M. Sivasakthi, "New results on harmonic mean graphs," *Malaya J. Mat.*, vol. 5, no. 1, pp. 482–486, 2020, doi: 10.26637/mjm0s20/0090.
- [7] Y. Tian, L. Li, H. Peng, and Y. Yang, "Achieving flatness: Graph labeling can generate graphical honeywords," *Comput. Secur.*, vol. 104, p. 102212, 2021, doi: 10.1016/j.cose.2021.102212.
- [8] P. Bonucci and N. Capitelli, "Weak harmonic labeling of graphs and multigraphs," *Discrete Math.*, vol. 345, no. 5, p. 112816, 2022, doi: 10.1016/j.disc.2022.112816.
- [9] T. Wang, B. Wu, and T. Wang, "Harmonic index of a line graph," *Discret. Appl. Math.*, vol. 325, pp. 284–296, 2023, doi: 10.1016/j.dam.2022.10.021.

- [10] H. Sevi, G. Rilling, and P. Borgnat, “Harmonic analysis on directed graphs and applications: From Fourier analysis to wavelets,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 62, pp. 390–440, 2023, doi: 10.1016/j.acha.2022.10.003.
- [11] Kurniawan Atmadja, K. A. Sugeng, and T. Yuniarko, “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga,” in *Konferensi Nasional Matematika XVII*, 2014, pp. 1435–1440.
- [12] Kurniawan Atmadja, “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Ganda LGn,” in *Konferensi Nasional Matematika XIX-2018*, 2018, pp. 163–167.
- [13] K. Atmadja, “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Jembatan,” in *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 2020, vol. 3, pp. 25–28.
- [14] Kurniawan Atmadja, “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segi Empat Variasi,” in *Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya*, 2020, pp. 320–324.
- [15] J. A. Gallian, “A dynamic survey of graph labeling,” *Electron. J. Comb.*, vol. 1, no. DynamicSurveys, 2018.