

Sifat Kemonotonan Barisan *Trapezoid Sum* dari Kelas Fungsi Nonkonveks dan Nonkonkaf

Yudasril^{1*}, Berlian Setiawaty², I Gusti Putu Purnaba³

^{1,2,3}Affiliasi: Jl. Raya Dramaga, Babakan, Dramaga, Bogor, Jawa Barat

^{1,2,3}Departemen Matematika Institut Pertanian Bogor

e-mail: mate2_yudasril@apps.ipb.ac.id

Diajukan: 21 Mei 2021, Diperbaiki: 15 September 2021, Diterima: 27 September 2021

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menunjukkan sifat-sifat kemonotonan barisan *trapezoid sum* secara umum dari fungsi-fungsi kontinu bernilai *real* yang nonkonveks atau nonkonkaf pada interval $[a, b]$ terhadap partisi-partisi dari $[a, b]$ yang diperoleh dengan membagi $[a, b]$ menjadi subinterval-subinterval yang sama panjang. Sifat monoton turun dari barisan *trapezoid sum* itu secara umum tidak terjadi pada kelas fungsi yang nonkonkaf. Hal yang sama terjadi bila difokuskan pada fungsi-fungsi nonkonkaf yang monoton, yaitu pada kelas fungsi yang naik nonkonkaf maupun turun nonkonkaf. Selanjutnya, pada kelas fungsi yang nonkonveks, barisan *trapezoid sum* itu secara umum tidak monoton naik, begitu juga pada kelas fungsi yang naik nonkonveks maupun turun nonkonveks.

Kata Kunci: monoton, nonkonkaf, nonkonveks, *trapezoid sum*

Abstract

The objective of this research is to show the monotonicity properties of the trapezoid sum sequence in general of nonconvex or nonconcave real valued continuous functions on interval $[a, b]$ corresponding to partitions of $[a, b]$ obtained by dividing $[a, b]$ into equal length subintervals. The decreasing monotony of the trapezoid sum generically does not happen in class of nonconcave functions. The same thing happens when restricted to the monotone nonconcave functions, namely in class of nonconcave increasing or nonconcave decreasing functions. Furthermore, in class of nonconvex functions, the trapezoid sum sequence generically does not increasing, as well as in class of increasing nonconvex or decreasing nonconvex functions.

Keywords: monotone, nonconcave, nonconvex, *trapezoid sum*

1 Pendahuluan

Integral tentu dapat didefinisikan sebagai luas daerah di bawah kurva dari suatu fungsi *real* taknegatif pada sebuah interval yang tertutup dan terbatas [1]. *Darboux sums* dan *trapezoid sum* merupakan dua dari sekian banyak alternatif yang dapat digunakan untuk menghampiri luas daerah tersebut.

Misalkan fungsi kontinu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ atau dengan kata lain $f \in C[a, b]$. Untuk setiap partisi P_n yang membagi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval dengan jarak yang sama, dibentuk suatu pendekatan dari nilai integral tentu f pada $[a, b]$ yakni, *trapezoid sum* $T_n(f)$, *lower*

Darboux sum $\underline{S}_n(f)$, dan *upper Darboux sum* $\overline{S}_n(f)$. Istilah *trapezoid sum* pada partisi P_n adalah dengan menghitung n buah luas trapesium pada partisi P_n dan menjumlahkan semua luas trapesium tersebut, sehingga untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, luas trapesium pada subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ adalah $(x_k - x_{k-1}) \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$. Secara matematis, hal itu dapat ditulis dalam definisi berikut.

Definisi 1[2] *Didefinisikan partisi $P_n, n \in \mathbb{N}$ pada interval $[a, b]$ dengan $\|P_n\| = \frac{b-a}{n}$, yaitu*

$$P_n = \left\{ x_j = a + j \frac{b-a}{n} \mid 0 \leq j \leq n \right\}.$$

Trapezoid sum dari fungsi $f \in C[a, b]$ yang berkorespondensi terhadap partisi P_n adalah

$$T(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_{i-1}) + f(x_i))}{2} (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_{i-1}) + f(x_i))}{2} \quad (1)$$

dengan $T(f, P_n) = T_n(f)$.

Kemudian, istilah *lower Darboux sum* dan *upper Darboux sum* pada partisi P_n itu secara matematis dapat pula ditulis dalam definisi berikut:

Definisi 2[1] *Lower Darboux sum dan upper Darboux sum dari $f \in C[a, b]$ yang berkorespondensi terhadap partisi P_n berturut-turut didefinisikan sebagai*

$$\underline{S}(f, P_n) = \underline{S}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n m_k \quad (2)$$

dan

$$\overline{S}(f, P_n) = \overline{S}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n M_k \quad (3)$$

dengan $m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dan $M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ untuk $k = 1, 2, \dots, n$.

Bila diperhatikan untuk fungsi-fungsi kontinu f yang konveks dan konkaf pada $[a, b]$, semakin kecil nilai $\|P_n\|$ (atau $n \in \mathbb{N}$ semakin besar), maka nilai $T_n(f)$ mengecil untuk fungsi kontinu f yang konveks dan membesar untuk f yang konkaf pada $[a, b]$. Hal ini dapat disajikan secara lengkap dalam teorema berikut:

Teorema 3[3] *Misalkan $f \in C[a, b]$ dan f' dapat berupa fungsi konveks atau konkaf. Jika f konveks, maka barisan $\{T_n(f)\}$ monoton turun. Jika f konkaf, maka barisan $\{T_n(f)\}$ monoton naik.*

Selanjutnya, terdapat pula sifat *Darboux sums* dari fungsi-fungsi yang monoton di $C[a, b]$ terhadap partisi $P_n, n \in \mathbb{N}$, yang ditulis dalam lemma berikut.

Lemma 4[4] *Misalkan fungsi monoton $f \in C[a, b]$ dan partisi-partisi $P_n, n \in \mathbb{N}$ pada $[a, b]$. Jika $\overline{S}_n(f) < \overline{S}_{n+1}(f)$, maka $\underline{S}_n(f) < \underline{S}_{n+1}(f)$.*

Lemma 4 ini mengindikasikan bahwa jika $\bar{S}_n(f) \leq \bar{S}_{n+1}(f)$, maka $\underline{S}_n(f) \leq \underline{S}_{n+1}(f)$, untuk fungsi monoton $f \in C[a, b]$ dan partisi $P_n, n \in \mathbb{N}$ pada $[a, b]$.

Sifat kemonotonan pada barisan $\{\underline{S}_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{\bar{S}_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ secara umum tidak terjadi dalam ruang metrik lengkap $C[a, b]$ [4]. Oleh karena itu, penulis tertarik pula untuk menyelidiki sifat kemonotonan pada barisan *trapezoid sum* $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ secara umum dalam ruang metrik lengkap (ruang *Banach* [5]) dari kelas-kelas fungsi nonkonkaf dan nonkonveks. Hal tersebut tentunya berkaitan dengan ruang metrik lengkap $C[a, b]$ dan *density* pada suatu himpunan, yang dapat disajikan dalam teorema dan definisi berikut.

Teorema 5[6] *Misalkan \mathbf{F} adalah himpunan semua fungsi bernilai real yang didefinisikan dan kontinu pada selang tertutup $[a, b]$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$. $\forall f, g \in \mathbf{F}$, didefinisikan metrik $\|\cdot\|_{\infty}$ sebagai berikut:*

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty} = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

($\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\infty}$) adalah ruang metrik yang dinotasikan sebagai ruang $C[a, b]$. Serta $C[a, b]$ lengkap.

Definisi 6[6] *Suatu himpunan U dikatakan dense pada X dalam ruang metrik (X, d) jika $X = \bar{U}$, dengan $f \in \bar{U}$ (penutup dari suatu himpunan U) dalam ruang metrik (X, d) jika dan hanya jika $\forall \delta > 0, \exists g \in U$ sedemikian sehingga $d(f, g) < \delta$.*

Selama U dense pada X , maka untuk setiap himpunan buka (yang dapat memuat f) dalam X memuat setidaknya satu elemen (katakanlah g) dari U [7]. Himpunan buka tersebut dapat berupa δ -neighbourhood dari f dalam ruang metrik (X, d) , yaitu sebagai himpunan $S_{\delta}(f) = \{g \in X : d(f, g) < \delta, \delta > 0\}$ [1].

Secara lengkap, penelitian ini bertujuan menunjukkan barisan *trapezoid sum* $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ tidak memenuhi sifat monoton secara umum, yaitu, tidak monoton turun pada kelas-kelas fungsi f yang nonkonkaf, naik nonkonkaf, dan turun nonkonkaf. Serta barisan itu tidak monoton naik pada kelas-kelas fungsi f yang nonkonveks, naik nonkonveks, dan turun nonkonveks.

Istilah secara umum pada karakteristik di bawah suatu himpunan dalam penelitian ini adalah generik secara topologi dalam suatu kelas, yakni himpunan tersebut bersifat residual atau memuat G_{δ} -dense (untuk lebih jelas, lihat [7] dan [8]). Sifat generik ini banyak dibangun dalam suatu kelas untuk melihat sifat yang khas pada kelas tersebut, salah satunya pada masalah pengoptimuman, seperti [9] dan [10]. Selain itu, sifat generik juga banyak digunakan dalam sistem dinamik, salah satunya seperti [11].

Berdasarkan teorema 3, kemonotonan $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ pada kelas fungsi konveks atau konkaf sudah teridentifikasi dengan jelas. Sebaliknya pada kelas fungsi nonkonkaf atau nonkonveks, kemonotonan barisan tersebut belum teridentifikasi dengan baik atau suatu ketentuan yang pasti

mengenai kemonotonan barisan tersebut. Jadi, dengan membangun suatu sifat yang generik pada kelas-kelas fungsi di atas, misal pada kelas fungsi nonkonkaf, maka setiap fungsi f di kelas itu setidaknya dapat didekati oleh suatu fungsi nonkonkaf g yang membuat $\{T_n(g)\}_{n=1}^{\infty}$ tidak monoton turun, yang mana bila ditelusuri, ekor barisan dari $\{T_n(g)\}_{n=1}^{\infty}$ bersifat monoton naik, dengan $T_n(f) \approx T_n(g)$.

2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah dengan melakukan kajian pustaka, dengan tahapan sebagai berikut. Pertama, didefinisikan himpunan-himpunan yang ingin diperiksa *density*nya terhadap kelas-kelas fungsi yang ditunjukkan, seperti koleksi fungsi nonkonkaf dan nonkonveks. Kemudian, dirumuskan lemma-lemma mengenai kemonotonan *trapezoid sum* dari hampiran fungsi-fungsi yang dituju, yang berguna untuk menerangkan sifat *density* himpunan-himpunan yang dimaksud. Terakhir, melalui kategori *Baire* (untuk lebih jelas, lihat [7]), akan ditunjukkan bahwa himpunan-himpunan tersebut bertipe \mathbf{G}_δ -dense, yaitu himpunan-himpunan tersebut dapat ditulis sebagai irisan terhingga dari subhimpunan-subhimpunan buka yang *dense* terhadap kelas fungsi yang ditunjukkan, yang dapat dirumuskan dalam teorema-teorema. Selain itu, dirumuskan juga teorema-teorema mengenai *density* bila difokuskan pada fungsi-fungsi yang monoton nonkonkaf dan monoton nonkonveks.

3 Hasil dan Pembahasan

Pertama-tama akan didefinisikan himpunan-himpunan atau kelas-kelas fungsi yang akan digunakan pada penelitian ini berdasarkan sifat fungsinya, yaitu

$$\begin{aligned} X_1 &= \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi nonkonkaf}\}, & X_2 &= \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi naik nonkonkaf}\}, \\ X_3 &= \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi turun nonkonkaf}\}, & Y_1 &= \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi nonkonveks}\}, \\ Y_2 &= \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi naik nonkonveks}\}, & Y_3 &= \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi turun nonkonveks}\}. \end{aligned}$$

Kemudian, didefinisikan pula himpunan-himpunan yang berkaitan dengan ketidakmonotonan barisan $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ yang dikategorikan berdasarkan kelas-kelas fungsi f di atas, yaitu

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f \in X_1: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, T_n(f) < T_{n+1}(f)\}, \\ A_2 &= \{f \in X_2: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, T_n(f) < T_{n+1}(f)\}, \\ A_3 &= \{f \in X_3: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, T_n(f) < T_{n+1}(f)\}, \\ B_1 &= \{f \in Y_1: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, T_{n+1}(f) < T_n(f)\}, \\ B_2 &= \{f \in Y_2: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, T_{n+1}(f) < T_n(f)\}, \end{aligned}$$

$$B_3 = \{f \in Y_3: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, T_{n+1}(f) < T_n(f)\}.$$

3.1. Kemonotonan Ekor Barisan *Trapezoid Sum* dari Hampiran fungsi-fungsi di X_1 dan Y_1

Setiap fungsi $f \in X_1$ dapat dihampiri oleh suatu fungsi $g \in C[a, b]$ yang nonkonkaf dan linear sesepenggal. Kemudian, *trapezoid sum* $T_n(g)$, bersifat monoton naik $\forall n \geq N$ pada suatu $N \in \mathbb{N}$. Hal ini disajikan secara matematis dan dibuktikan pada lemma berikut.

Lemma 7 Misalkan $f \in C[a, b]$ yang nonkonkaf. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$ terdapat fungsi nonkonkaf dan linear sesepenggal $g \in C[a, b]$ sedemikian sehingga

$$\|f - g\|_\infty < \epsilon \text{ dan } T_n(g) < T_{n+1}(g).$$

Bukti: Ambil sebarang $\epsilon > 0$. Diketahui $f \in C[a, b]$, maka fungsi f kontinu seragam pada $[a, b]$

[1]. Oleh karena itu, berdasarkan definisi, terdapat $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \delta(\epsilon)\right) > 0$ sedemikian sehingga

$\forall x, y \in [a, b]$ dengan $|x - y| < \delta$, maka $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{5}$ [1]. Pilih $N = N(\epsilon) > \frac{(b-a)}{\delta}$, maka $\frac{(b-a)}{N} < \delta$. Selanjutnya, ambil sebarang $n \geq N$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Misalkan partisi-partisi

$$P_n = \left\{x_j = a + j \frac{(b-a)}{n} : 0 \leq j \leq n\right\}, \quad (4)$$

$$P_{n+1} = \left\{y_j = a + j \frac{(b-a)}{n+1} : 0 \leq j \leq n+1\right\}.$$

Perlu diperhatikan bahwa $x_{j-1} < y_j < x_j, 1 \leq j \leq n$. Konstruksi fungsi $g \in C[a, b]$ sebagai berikut.

Pertama, definisikan

$$f(x_j) = p_j, 0 \leq j \leq n. \quad (5)$$

Karena f nonkonkaf, maka terdapat $t \in [0, 1]$ dan $x_1, x_2 \in [a, b]$ sehingga

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2) [1].$$

Oleh karena itu, f bisa saja berupa fungsi konveks tegas ataupun tidak keduanya (f nonkonkaf dan nonkonveks) [1]. Bila f konveks tegas, maka ada minimum global dari f pada $[a, b]$, katakanlah $f(c), c \in [a, b]$ [2]. Selain itu, f turun pada $[a, c)$ dan naik pada $(c, b]$. Selanjutnya, bila f bersifat tidak keduanya, cukup perhatikan pada beberapa titik di $[a, b]$, katakanlah $f(c_k), c_k \in [a, b], k = 1, 2, \dots, z$, untuk suatu $z \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga f turun dan kemudian naik yang selanjutnya disebut lembah (atau sebaliknya yang disebut puncak) pada titik-titik sebelum dan sesudah c_k , yaitu pada interval $[a, c_1), (c_{k-1}, c_k), k = 2, 3, \dots, z$, dan $(c_z, b]$. Akibatnya, pada subinterval-subinterval tersebut, f bersifat monoton. Kondisi-kondisi di atas mengindikasikan bahwa f bisa saja memuat minimum lokal (lembah) maupun maksimum lokal (bukit) (memungkinkan untuk memuat lebih dari satu lembah atau bukit). Selanjutnya, partisi-

partisi (4) masing-masing dapat dibentuk menjadi gabungan beberapa subpartisi yaitu $P_n = P_n^1 \cup P_n^2 \cup P_n^3 \cup \dots \cup P_n^{2z-1} \cup P_n^{2z} \cup P_n^{2z+1}$, dengan

$$P_n^1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{l_1}\},$$

$$P_n^t = \{x_{l_k}, x_{l_{k+1}}\}, t = 2, 4, \dots, 2z \text{ dan } k = \frac{t}{2},$$

$$P_n^t = \{x_{l_{k+1}}, x_{l_{k+2}}, \dots, x_{l_{(k+1)}-1}, x_{l_{(k+1)}}\}, t = 3, \dots, 2z - 1 \text{ dan } k = \frac{t-1}{2},$$

$$P_n^{2z+1} = \{x_{l_z+1}, x_{l_z+2}, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

dan $P_{n+1} = P_{n+1}^1 \cup P_{n+1}^2 \cup P_{n+1}^3 \cup \dots \cup P_{n+1}^{2z-1} \cup P_{n+1}^{2z} \cup P_{n+1}^{2z+1}$, dengan

$$P_{n+1}^1 = \{y_0, y_1, \dots, y_{l_1}, x_{l_1}\},$$

$$P_{n+1}^t = \{x_{l_k}, y_{l_{k+1}}, x_{l_{k+1}}\}, t = 2, 4, \dots, 2z \text{ dan } k = \frac{t}{2},$$

$$P_{n+1}^t = \{x_{l_{k+1}}, y_{l_{k+2}}, \dots, y_{l_{(k+1)}-1}, y_{l_{(k+1)}}, x_{l_{(k+1)}}\}, t = 3, \dots, 2z - 1 \text{ dan } k = \frac{t-1}{2},$$

$$P_{n+1}^{2z+1} = \{x_{l_z+1}, y_{l_z+2}, \dots, y_{n-1}, y_n\},$$

di mana $c_k \in [x_{l_k}, x_{l_{k+1}}] \subset [y_{l_k}, y_{l_{k+2}}]$ untuk suatu $l_k \in \mathbb{N}$ dengan $l_{k-1} < l_k < n$, $k = 1, 2, \dots, z$.

Misalkan $v_k = f(c_k)$, $k = 1, 2, \dots, z$. Kemudian, didefinisikan fungsi $g \in C[a, b]$ sebagai berikut:

Jika f turun pada $[a, c_1]$ dan kemudian naik pada (c_1, c_2) ,

$$g(x_{j-1}) = g(y_j) = p_{j-1}, j = 1, 2, \dots, l_1, g(x_{l_1}) = p_{l_1}^*, g(y_{l_1+1}) = v_1, g(x_{l_1+1}) = p_{l_1+1}^*,$$

$$g(y_j) = g(x_j) = p_j, j = l_1 + 2, l_1 + 3, \dots, l_2 - 1,$$

dengan $v_1 < p_{l_1} < p_{l_1}^* < p_{l_1-1}$ dan $v_1 < p_{l_1+1} < p_{l_1+1}^* < p_{l_1+2}$, di mana $p_{l_1}^*$ terletak pada garis

yang melewati titik (y_{l_1}, p_{l_1-1}) dan (y_{l_1+1}, v_1) , dan $p_{l_1+1}^*$ pada garis yang melewati titik

(y_{l_1+1}, v_1) dan (y_{l_1+2}, p_{l_1+2}) . Jika f naik pada $[a, c_1]$ dan kemudian turun pada (c_1, c_2) ,

$$g(y_j) = g(x_j) = p_j, j = 0, 1, \dots, l_1 - 1, g(y_{l_1}) = p_{l_1}, g(x_{l_1}) = p_{l_1}^*, g(y_{l_1+1}) = v_1,$$

$$g(x_{l_1+1}) = p_{l_1+1}^*, g(y_{l_1+2}) = p_{l_1+1}, g(x_{j-1}) = g(y_j) = p_{j-1}, j = l_1 + 3, l_1 + 4, \dots, l_2,$$

dengan $p_{l_1}^* < v_1$ dan $p_{l_1+1}^* < v_1$, di mana $p_{l_1}^*$ terletak pada garis yang melewati titik (y_{l_1}, p_{l_1})

dan (y_{l_1+1}, v_1) , dan $p_{l_1+1}^*$ pada garis yang melewati titik (y_{l_1+1}, v_1) dan (y_{l_1+2}, p_{l_1+1}) .

Selanjutnya untuk $k = 2, 3, \dots, z$, jika f naik pada (c_{k-1}, c_k) ,

$$g(x_{l_{(k-1)}+1}) = p_{l_{(k-1)}+1}^*, g(y_j) = g(x_j) = p_j, j = l_{(k-1)} + 2, l_{(k-1)} + 3, \dots, l_k - 1,$$

$$g(y_{l_k}) = p_{l_k}, \quad g(x_{l_k}) = p_{l_k}^*, \quad g(y_{l_{k+1}}) = v_k,$$

dengan $v_{(k-1)} < p_{l_{(k-1)}+1} < p_{l_{(k-1)}+1}^* < p_{l_{(k-1)}+2}$ dan $p_{l_k}^* < v_k$, di mana $p_{l_{(k-1)}+1}^*$ terletak pada garis yang melewati titik $(y_{l_{(k-1)}+1}, v_{(k-1)})$ dan $(y_{l_{(k-1)}+2}, p_{l_{(k-1)}+2})$, dan $p_{l_k}^*$ pada garis yang melewati titik (y_{l_k}, p_{l_k}) dan (y_{l_k+1}, v_k) , dan jika f turun pada (c_{k-1}, c_k) ,

$$g(x_{l_{(k-1)}+1}) = p_{l_{(k-1)}+1}^*, \quad g(y_{l_{(k-1)}+2}) = p_{l_{(k-1)}+2}$$

$$g(x_{j-1}) = g(y_j) = p_{j-1}, j = l_{(k-1)} + 3, l_{(k-1)} + 4, \dots, l_k, g(x_{l_k}) = p_{l_k}^*, g(y_{l_k+1}) = v_k,$$

dengan $p_{l_{(k-1)}+1}^* < v_{(k-1)}$ dan $v_k < p_{l_k} < p_{l_k}^* < p_{l_k-1}$, di mana $p_{l_{(k-1)}+1}^*$ terletak pada garis yang melewati titik $(y_{l_{(k-1)}+1}, v_{(k-1)})$ dan $(y_{l_{(k-1)}+2}, p_{l_{(k-1)}+1})$, dan $p_{l_k}^*$ pada garis yang melewati titik (y_{l_k}, p_{l_k-1}) dan (y_{l_k+1}, v_k) . Terakhir, jika f naik pada $(c_z, b]$,

$$g(y_{l_z+1}) = v_z, \quad g(x_{l_z+1}) = p_{l_z+1}^*,$$

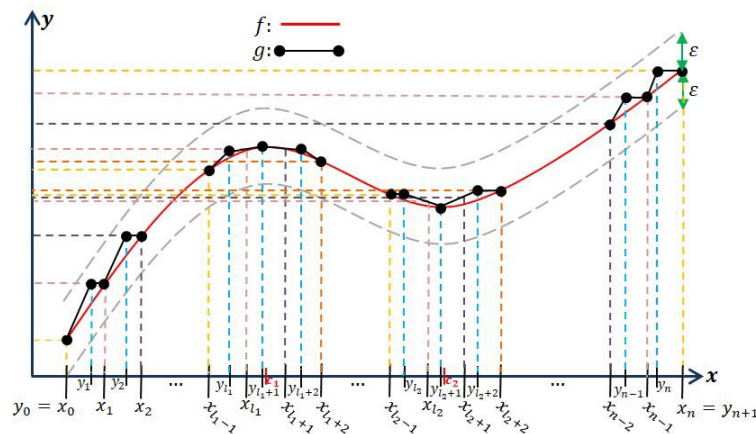
$$g(y_j) = g(x_j) = p_j, j = l_z + 2, l_z + 3, \dots, n, g(x_n) = g(y_{n+1}) = p_n,$$

dengan $v_z < p_{l_z+1} < p_{l_z+1}^* < p_{l_z+2}$, di mana $p_{l_z+1}^*$ terletak pada garis yang melewati titik (y_{l_z+1}, v_z) dan (y_{l_z+2}, p_{l_z+2}) , dan jika f turun pada $(c_z, b]$,

$$g(y_{l_z+1}) = v_z, \quad g(x_{l_z+1}) = p_{l_z+1}^*, \quad g(y_{l_z+2}) = p_{l_z+1},$$

$$g(x_{j-1}) = g(y_j) = p_{j-1}, j = l_z + 3, l_z + 4, \dots, n, g(x_n) = g(y_{n+1}) = p_n,$$

dengan $p_{l_z+1}^* < v_z$, di mana $p_{l_z+1}^*$ terletak pada garis yang melewati titik (y_{l_z+1}, v_z) dan (y_{l_z+2}, p_{l_z+1}) . Dari semua kondisi di atas, g dibentuk sebagai fungsi linear pada interval $I_j^1 = [x_{j-1}, y_j]$ dan $I_j^2 = [y_j, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, l_1, \dots, l_k, \dots, l_z, \dots, n$. Karena $[a, b] = \bigcup_{j=1}^n (I_j^1 \cup I_j^2)$, maka g berupa linear sesepenggal pada $[a, b]$ (karenanya g juga bersifat nonkonkaf) [1]. Fungsi g dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Ilustrasi kurva fungsi g

Perhatikan bahwa untuk $j = 1, 2, \dots, n$, $|p_{j-1} - p_j| < \frac{\varepsilon}{5}$, sebab $|x_j - x_{j-1}| < \delta$. Oleh karena itu, berdasarkan konstruksi di atas, berlaku $|p_{j-1} - f(y_j)| < \frac{\varepsilon}{5}$, $|p_j - f(y_j)| < \frac{\varepsilon}{5}$, $|p_{l_k} - v_k| < \frac{\varepsilon}{5}$ dan $|p_{l_{k+1}} - v_k| < \frac{\varepsilon}{5}$. Pertama akan dibuktikan bahwa $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Ambil sebarang $x \in [a, b]$. Jika $x \in [a, y_{l_1}] \subset [a, c_1)$, sehingga $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq l_1 - 1$ atau $x \in (x_{l_1-1}, y_{l_1}]$, lalu pilih $y = x_j$ bila $f(x)$ turun atau $y = x_{j-1}$ bila $f(x)$ naik, untuk $1 \leq j \leq l_1$. Jika $x \in (y_{l_k}, y_{l_{k+2}})$, $k = 1, 2, \dots, z$, sehingga $x \in (y_{l_k}, y_{l_{k+1}}]$ atau $x \in (y_{l_{k+1}}, y_{l_{k+2}})$, lalu pilih $y = c_k$, baik untuk $f(x)$ yang berupa lembah maupun bukit. Jika $x \in [y_{l_{(k-1)+2}}, y_{l_k}] \subset (c_{k-1}, c_k)$, $k = 1, 2, \dots, z$, sehingga $x \in [y_{l_{(k-1)+2}}, x_{l_{(k-1)+2}})$, $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $l_{(k-1)} + 3 \leq j \leq l_k - 1$, atau $x \in (x_{l_{k-1}}, y_{l_k}]$, lalu pilih $y = x_j$ bila $f(x)$ turun atau $y = x_{j-1}$ bila $f(x)$ naik, untuk $l_{(k-1)} + 2 \leq j \leq l_k$. Jika $x \in [y_{l_z+2}, b] \subset (c_z, b]$, sehingga $x \in [y_{l_z+2}, x_{l_z+2})$ atau $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $l_z + 3 \leq j \leq n$, lalu pilih $y = x_j$ bila $f(x)$ turun dan $y = x_{j-1}$ bila $f(x)$ naik, untuk $l_z + 2 \leq j \leq n$. Berdasarkan konstruksi fungsi g dengan kondisi-kondisi di atas, dengan mudah dapat diperiksa bahwa $|f(y) - g(x)| < \frac{2\varepsilon}{5}$ dan $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{5}$. Oleh sebab itu, $\forall x \in [a, b]$, diperoleh

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(x)| < \frac{4\varepsilon}{5}.$$

Kesimpulannya, $\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \leq \frac{4\varepsilon}{5} < \varepsilon$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $T_n(g) < T_{n+1}(g)$. Sebelum itu, akan ditentukan terlebih dahulu batas nilai dari $T(g, P_n^t) - T(g, P_{n+1}^t)$, $t = 1, 2, \dots, z, \dots, 2z, 2z + 1$. Pertama, untuk $t = 1$ dengan $P_n^1, P_{n+1}^1 \subset [a, c_1)$. Misalkan f turun pada $[a, c_1)$, diperoleh

$$\begin{aligned} & 2T(g, P_n^1) - 2T(g, P_{n+1}^1) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{l_1-1} (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n} (p_{l_1-1} + p_{l_1}^*) - \frac{b-a}{n+1} (p_0 + p_0) - \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=1}^{l_1-1} (p_{i-1} + p_i) \\ &\quad - l_1 \frac{b-a}{n(n+1)} (p_{l_1}^* + p_{l_1-1}) \\ &< \frac{b-a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{l_1-1} (2p_0) + \frac{b-a}{n(n+1)} (n+1-l_1)(2p_0) - \frac{b-a}{n+1} (2p_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Namun, bila f naik pada interval tersebut, didapat $T(g, P_n^1) - T(g, P_{n+1}^1) \leq 0$, sebab

$$2T(g, P_n^1) - 2T(g, P_{n+1}^1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{l_1-1} (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n} (p_{l_1-1} + p_{l_1}^*) - \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=1}^{l_1-1} (p_{i-1} + p_i) \\
&\quad - \frac{b-a}{n+1} (p_{l_1-1} + p_{l_1}) - l_1 \frac{b-a}{n(n+1)} (p_{l_1}^* + p_{l_1}) \\
&< \frac{b-a}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{l_1-1} (2v_1) + \frac{b-a}{n(n+1)} (n+1-l_1) (p_{l_1-1} + p_{l_1}^*) - \frac{b-a}{n+1} (p_{l_1-1} + p_{l_1}) \\
&< \frac{b-a}{n+1} (2(v_1 - p_{l_1-1})) \\
&< \delta \frac{4\varepsilon}{5}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk $t = 2, 4, \dots, 2z$ dan $k = \frac{t}{2}$, dengan $P_n^t, P_{n+1}^t \subset (y_{l_k}, y_{l_{k+2}})$. Misalkan f berupa bukit pada $(y_{l_k}, y_{l_{k+2}})$ sehingga f naik pada $(y_{l_k}, c_k) \subset (c_{k-1}, c_k)$ dan turun pada $(c_k, y_{l_{k+2}}) \subset (c_k, c_{k+1})$, diperoleh

$$T(g, P_n^t) - T(g, P_{n+1}^t) = \frac{1}{2} [(p_{l_k}^* - v_k)(x_{l_{k+1}} - y_{l_{k+1}}) + (p_{l_{k+1}}^* - v_k)(y_{l_{k+1}} - x_{l_k})] < 0.$$

Namun, bila f berupa lembah pada interval tersebut sehingga f turun pada $(y_{l_k}, c_k) \subset (c_{k-1}, c_k)$ dan naik pada $(c_k, y_{l_{k+2}}) \subset (c_k, c_{k+1})$, didapat $T(g, P_n^t) - T(g, P_{n+1}^t) \leq 0$, sebab

$$\begin{aligned}
2T(g, P_n^t) - 2T(g, P_{n+1}^t) &= (p_{l_k}^* - v_k)(x_{l_{k+1}} - y_{l_{k+1}}) + (p_{l_{k+1}}^* - v_k)(y_{l_{k+1}} - x_{l_k}) \\
&< \frac{2\varepsilon}{5} (x_{l_{k+1}} - x_{l_k}) \\
&< \frac{2\varepsilon}{5} \delta.
\end{aligned}$$

Kemudian, untuk $t = 3, \dots, 2z-1$ dan $k = \frac{t-1}{2}$, dengan $P_n^t, P_{n+1}^t \subset (c_{k-1}, c_k)$. Misalkan f naik pada (c_{k-1}, c_k) , diperoleh

$$\begin{aligned}
&2T(g, P_n^t) - 2T(g, P_{n+1}^t) \\
&= \frac{b-a}{n} (p_{l_{(k-1)+1}}^* + p_{l_{(k-1)+2}}) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=l_{(k-1)+3}}^{l_k-1} (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n} (p_{l_{k-1}} + p_{l_k}^*) \\
&\quad - \frac{b-a}{n(n+1)} (n - l_{(k-1)} - 1) (p_{l_{(k-1)+1}}^* + p_{l_{(k-1)+2}}) - \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=l_{(k-1)+3}}^{l_k-1} (p_{i-1} + p_i) \\
&\quad - \frac{b-a}{n+1} (p_{l_{k-1}} + p_{l_k}) - (x_{l_k} - y_{l_k}) (p_{l_k} + p_{l_k}^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{b-a}{n(n+1)} \sum_{i=l_{(k-1)}+3}^{l_k-1} (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n(n+1)} (l_{(k-1)} + 2) (p_{l_{(k-1)}+1}^* + p_{l_{(k-1)}+2}) \\
&\quad + \frac{b-a}{n} (p_{l_k} + p_{l_k}^*) - \frac{b-a}{n+1} (p_{l_{k-1}} + p_{l_k}) - l_k \frac{b-a}{n(n+1)} (p_{l_k} + p_{l_k}^*) \\
&< \frac{b-a}{n+1} (2(v_k - p_{l_{k-1}})) \\
&< \delta \frac{4\varepsilon}{5},
\end{aligned}$$

sehingga $T(g, P_n^t) - T(g, P_{n+1}^t) \leq 0$. Begitu juga untuk f yang turun pada (c_{k-1}, c_k) , sebab $2T(g, P_n^t) - 2T(g, P_{n+1}^t)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{n} (p_{l_{(k-1)}+1}^* + p_{l_{(k-1)}+2}) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=l_{(k-1)}+3}^{l_k-1} (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n} (p_{l_{k-1}} + p_{l_k}^*) - \\
&\quad (y_{l_{(k-1)}+2} - x_{l_{(k-1)}+1}) (p_{l_{(k-1)}+1}^* + p_{l_{(k-1)}+1}) - \frac{b-a}{n+1} (p_{l_{(k-1)}+1} + p_{l_{(k-1)}+2}) - \\
&\quad \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=l_{(k-1)}+4}^{l_k} (p_{i-2} + p_{i-1}) - (x_{l_k} - y_{l_k}) (p_{l_{k-1}} + p_{l_k}^*) \\
&< \frac{b-a}{n(n+1)} \sum_{i=l_{(k-1)}+3}^{l_k-1} (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n(n+1)} (l_{(k-1)} + 2) (p_{l_{(k-1)}+1}^* + p_{l_{(k-1)}+1}) \\
&\quad + \frac{b-a}{n(n+1)} (n+1 - l_k) (p_{l_{k-1}} + p_{l_k}^*) - \frac{b-a}{n+1} (p_{l_{(k-1)}+1} + p_{l_{(k-1)}+2}) \\
&< \frac{b-a}{n+1} (2(v_{k-1} - p_{l_{(k-1)}+2})) \\
&< \delta \frac{4\varepsilon}{5}.
\end{aligned}$$

Terakhir, untuk $t = 2z + 1$ dengan $P_n^{2z+1}, P_{n+1}^{2z+1} \subset (c_z, b]$. Misalkan f naik pada $(c_z, b]$, didapat $2T(g, P_n^{2z+1}) - 2T(g, P_{n+1}^{2z+1})$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{n} (p_{l_z+1}^* + p_{l_z+2}) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=l_z+3}^n (p_{i-1} + p_i) - \frac{b-a}{n(n+1)} (n - l_z - 1) (p_{l_z+1}^* + p_{l_z+2}) \\
&\quad - \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=l_z+3}^n (p_{i-1} + p_i) - \frac{b-a}{n+1} (p_n + p_n) \\
&< \frac{b-a}{n(n+1)} (n - l_z - 2) (2p_n) + \frac{b-a}{n(n+1)} (l_z + 2) (2p_n) - \frac{b-a}{n+1} (2p_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Namun, bila f turun pada interval tersebut, didapat $T(g, P_n^{2z+1}) - T(g, P_{n+1}^{2z+1}) \leq 0$, sebab

$$\begin{aligned}
& 2T(g, P_n^{2z+1}) - 2T(g, P_{n+1}^{2z+1}) \\
&= \frac{b-a}{n}(p_{l_z+1}^* + p_{l_z+2}) + \frac{b-a}{n} \sum_{i=l_z+3}^n (p_{i-1} + p_i) - \frac{b-a}{n(n+1)}(n-l_z-1)(p_{l_z+1} + p_{l_z+1}^*) \\
&\quad - \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=l_z+4}^{n+1} (p_{i-2} + p_{i-1}) - \frac{b-a}{n+1}(p_{l_z+1} + p_{l_z+2}) \\
&< \frac{b-a}{n(n+1)} \sum_{i=l_z+3}^n (p_{i-1} + p_i) + \frac{b-a}{n(n+1)}(l_z+2)(p_{l_z+1} + p_{l_z+1}^*) - \frac{b-a}{n+1}(p_{l_z+1} + p_{l_z+2}) \\
&< \frac{b-a}{n+1}(2(v_z - p_{l_z+2})) \\
&< \delta \frac{4\varepsilon}{5}.
\end{aligned}$$

Mengacu pada partisi P_n dan P_{n+1} , perhatikan bahwa

$$T_n(g) = T(g, P_n^1) + T(g, P_n^2) + \cdots + T(g, P_n^{2k}) + T(g, P_n^{2k+1}) + \cdots + T(g, P_n^{2z}) + T(g, P_n^{2z+1}),$$

dan

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(g) &= T(g, P_{n+1}^1) + T(g, P_{n+1}^2) + \cdots + T(g, P_{n+1}^{2k}) + T(g, P_{n+1}^{2k+1}) + \cdots + T(g, P_{n+1}^{2z}) \\
&\quad + T(g, P_{n+1}^{2z+1})
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, berdasarkan fakta-fakta dari semua kemungkinan di atas, terbukti bahwa

$$T_n(g) < T_{n+1}(g).$$

■

Setiap fungsi $f \in Y_1$ dapat dihampiri oleh suatu fungsi $g \in C[a, b]$ yang nonkonveks dan linear sesepenggal. Kemudian, *trapezoid sum* $T_n(g)$, bersifat monoton turun $\forall n \geq N$ pada suatu $N \in \mathbb{N}$. Hal ini dapat disajikan secara matematis dan dibuktikan pada lemma berikut.

Lemma 8 Misalkan $f \in C[a, b]$ yang nonkonveks. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$ terdapat fungsi nonkonveks dan linear sesepenggal $g \in C[a, b]$ sedemikian sehingga

$$\|f - g\|_\infty < \varepsilon \text{ dan } T_{n+1}(g) < T_n(g).$$

Bukti: Diketahui fungsi $f \in C[a, b]$ yang nonkonveks. Akibatnya, terdapat $t \in [0, 1]$ dan $x_1, x_2 \in [a, b]$ sehingga $f((1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ [1]. Misalkan $h = -f$ pada $[a, b]$, maka diperoleh $h((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)h(x_1) + th(x_2)$. Artinya, h adalah fungsi yang nonkonkaf (h juga kontinu) pada $[a, b]$, berdasarkan definisi dari fungsi konkaf [1]. Oleh karena itu, menurut lemma 7, berlaku bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$ terdapat fungsi nonkonkaf dan linear sesepenggal $g_1 \in C[a, b]$ sedemikian sehingga

$\|h - g_1\|_\infty < \varepsilon$ dan $T_n(g_1) < T_{n+1}(g_1)$. Selanjutnya, pilih $g(x) = -g_1(x), \forall x \in [a, b]$, diperoleh

$$\|f - g\|_\infty = \|-h + g_1\|_\infty = \|h - g_1\|_\infty < \varepsilon \text{ dan}$$

$$T_{n+1}(g) - T_n(g) = -T_{n+1}(g_1) + T_n(g_1) < 0.$$

■

3.2. Sifat Kemonotonan $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$ dari fungsi-fungsi f di X_1 dan Y_1

Sifat kemonotonan $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$ dengan sebarang $f \in X_1$, secara umum $\{T_n(f)\}$ tidak monoton turun. Artinya, f senantiasa berada di A_1 atau $\exists g \in A_1$ yang mendekati f itu. Sebaliknya, $\{T_n(f)\}$ dengan sebarang $f \in Y_1$, secara umum $\{T_n(f)\}$ tidak monoton naik, yang artinya f senantiasa berada di B_1 atau $\exists g \in B_1$ yang mendekati f itu. Kedua pernyataan di atas, merupakan aplikasi dari sifat kepadatan atau *density* suatu himpunan terhadap himpunan lainnya, yakni A_1 *dense* pada X_1 dan B_1 *dense* pada Y_1 , yang dapat disajikan dalam teorema berikut, melalui kategori *Baire*. Sebelum itu, catat bahwa X_1 dan Y_1 adalah ruang *Banach*.

Teorema 9 A_1 dan B_1 masing-masing adalah subhimpunan G_δ -dense dari X_1 dan Y_1 .

Bukti: Misalkan $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \{f \in X_1 : T_n(f) < T_{n+1}(f)\} \text{ dan } W_n = \{f \in Y_1 : T_{n+1}(f) < T_n(f)\}.$$

Selanjutnya, misalkan pula $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$A_{1,N} = \bigcup_{k=N}^{+\infty} V_k \text{ dan } B_{1,N} = \bigcup_{k=N}^{+\infty} W_k.$$

Oleh karena itu, himpunan A_1 dan B_1 dapat ditulis sebagai

$$A_1 = \bigcap_{N=1}^{+\infty} A_{1,N} \text{ dan } B_1 = \bigcap_{N=1}^{+\infty} B_{1,N}.$$

Jadi, A_1 dan B_1 bertipe G_δ , karena dapat ditulis sebagai irisan terhingga dari himpunan-himpunan buka. Hal ini tentu disebabkan oleh V_n dan $W_n, n \in \mathbb{N}$ adalah himpunan terbuka, sehingga $A_{1,N}$ dan $B_{1,N}, N \in \mathbb{N}$ masing-masing adalah subhimpunan terbuka dari X_1 dan Y_1 .

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $A_{1,k}$ dan $B_{1,k}$ berturut-turut *dense* pada X_1 dan Y_1 . Ambil $f \in X_1$ dan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka dengan lemma 7, $\exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$, $\exists g \in V_n \subset A_{1,k}$ yang senantiasa memenuhi $d(f, g) = \|f - g\|_\infty < \varepsilon$, dengan $k \leq n$. Selanjutnya, ambil $f \in Y_1$ dan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka dengan lemma 8, $\exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$, $\exists g \in V_n \subset B_{1,k}$ yang senantiasa memenuhi $d(f, g) = \|f - g\|_\infty < \varepsilon$, dengan $k \leq n$. Oleh sebab itu, serta jelas bahwa $\overline{A_{1,k}} \subseteq X_1$ dan $\overline{B_{1,k}} \subseteq Y_1$, maka dengan definisi 6, terbukti bahwa $A_{1,k}$ dan $B_{1,k}$ berturut-turut *dense* pada X_1 dan Y_1 . Artinya, secara berturut-turut

A_1 dan B_1 bertipe G_δ -dense dari X_1 dan Y_1 , $k \in \mathbb{N}$. Jadi, dengan kategori *Baire*, A_1 dan B_1 berturut-turut *dense* terhadap X_1 dan Y_1 .

■

3.3. Sifat Kemonotonan $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$ dari fungsi-fungsi f di X_2, X_3, Y_2 , dan Y_3

Bila difokuskan pada fungsi-fungsi monoton yang nonkonkaf maupun nonkonveks dari $C[a, b]$, himpunan A_2, A_3, B_2 , dan B_3 berturut-turut juga *dense* terhadap X_2, X_3, Y_2 , dan Y_3 . Artinya, $\forall f \in X_k, k = 2, 3$, maka $f \in A_k$ atau $\exists g \in A_k$ yang mendekati f . Begitu juga jika $\forall f \in Y_k, k = 2, 3$, $f \in B_k$ atau $\exists g \in B_k$ yang mendekati f . Oleh karena itu, sifat monoton dari $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$ secara umum tidak terjadi dalam X_2, X_3, Y_2 , dan Y_3 . Catat bahwa X_2, X_3, Y_2 , dan Y_3 adalah ruang metrik.

Untuk membuktikan pernyataan di atas, perlu diketahui beberapa sifat kemonotonan barisan *Darboux sums* terlebih dahulu. Misalkan himpunan

$$X_\uparrow = \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi naik}\}, X_\downarrow = \{f \in C[a, b]: f \text{ fungsi turun}\},$$

$$U_\uparrow = \{f \in X_\uparrow: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq N, \underline{S}_{m+1}(f) < \underline{S}_n(f) \text{ dan } \bar{S}_n(f) < \bar{S}_{n+1}(f)\}, \text{ dan}$$

$$U_\downarrow = \{f \in X_\downarrow: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq N, \underline{S}_{m+1}(f) < \underline{S}_n(f) \text{ dan } \bar{S}_n(f) < \bar{S}_{n+1}(f)\}.$$

Berlaku, U_\uparrow *dense* pada X_\uparrow dan U_\downarrow pada X_\downarrow [4]. Artinya, dengan definisi 4 diperoleh $X_\uparrow = \overline{U_\uparrow}$ dan $X_\downarrow = \overline{U_\downarrow}$. Selain itu, selama $f \in C[a, b]$ monoton, baik itu f konveks maupun konkaf, barisan $\{\underline{S}_n(f)\}_{n=1}^\infty$ naik dan $\{\bar{S}_n(f)\}_{n=1}^\infty$ turun [4]. Hal itu dapat ditulis seperti berikut:

$$\underline{S}_n(f) < \underline{S}_{n+1}(f) \text{ dan } \bar{S}_{n+1}(f) < \bar{S}_n(f), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Selanjutnya, dengan cara yang serupa seperti lemma 7 hingga teorema 9, juga diperoleh bahwa himpunan A_2, A_3, B_2 , dan B_3 bersifat G_δ -dense. Namun, dalam artikel ini langsung menjelaskan *density* A_2, A_3, B_2 , dan B_3 tanpa melalui kategori *Baire*, yang dapat disajikan dalam dua teorema di bawah ini.

Teorema 10 A_2 dan A_3 masing-masing adalah subhimpunan *dense* dari X_2 dan X_3 .

Bukti: Jelas bahwa $\overline{A_2} \subseteq X_2$ dan $\overline{A_3} \subseteq X_3$, sehingga cukup buktikan bahwa $X_2 \subseteq \overline{A_2}$ dan $X_3 \subseteq \overline{A_3}$. Pertama, ambil sebarang $f \in X_2$. Karena $X_2 \subseteq X_\uparrow = \overline{U_\uparrow}$, maka $f \in \overline{U_\uparrow}$. Oleh sebab itu, $\exists g \in U_\uparrow$ dengan $d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Akibatnya $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ sedemikian sehingga $\bar{S}_n(g) < \bar{S}_{n+1}(g)$, maka berlaku pula $\underline{S}_n(g) < \underline{S}_{n+1}(g)$, menurut lemma 4. Oleh karena itu, diperoleh $T_n(g) < T_{n+1}(g)$, dengan kata lain $\exists g \in A_2, d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Kesimpulannya, $f \in \overline{A_2}$.

Selanjutnya, karena $X_3 \subseteq X_\downarrow = \overline{U_\downarrow}$, maka $f \in \overline{U_\downarrow}, \forall f \in X_3$. Oleh sebab itu, $\exists g \in U_\downarrow$ dengan $d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Akibatnya $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ sedemikian sehingga $\bar{S}_n(g) < \bar{S}_{n+1}(g)$, dan

menurut lemma 4 berlaku juga $\underline{S}_n(g) < \underline{S}_{n+1}(g)$. Oleh karena itu, diperoleh $T_n(g) < T_{n+1}(g)$, dengan kata lain $\exists g \in A_3, d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Kesimpulannya, $f \in \overline{A_3}$.

Kedua fakta di atas menjelaskan bahwa $X_2 \subseteq \overline{A_2}$ dan $X_3 \subseteq \overline{A_3}$, sehingga berdasarkan definisi 6, terbukti bahwa A_2 dan A_3 berturut-turut *dense* pada X_2 dan X_3 . ■

Teorema 11 B_2 dan B_3 masing-masing adalah subhimpunan *dense* dari Y_2 dan Y_3 .

Bukti: Jelas bahwa $\overline{B_2} \subseteq Y_2$ dan $\overline{B_3} \subseteq Y_3$, sehingga untuk itu cukup buktikan bahwa $Y_2 \subseteq \overline{B_2}$ dan $Y_3 \subseteq \overline{B_3}$. Pertama, ambil sebarang $f \in Y_2$. Karena $Y_2 \subseteq X_\uparrow = \overline{U_\uparrow}$, maka $f \in \overline{U_\uparrow}$. Oleh sebab itu, $\exists g \in U_\uparrow, d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Akibatnya $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ (dalam hal ini ambil $n = m$) sedemikian sehingga $\underline{S}_{n+1}(g) < \underline{S}_n(g)$, maka berlaku pula $\overline{S}_{n+1}(g) < \overline{S}_n(g)$. Oleh karena itu, diperoleh $T_{n+1}(g) < T_n(g)$, dengan kata lain $\exists g \in B_2, d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Kesimpulannya $f \in \overline{B_2}$.

Selanjutnya, karena $Y_3 \subseteq X_\downarrow = \overline{U_\downarrow}$, maka $f \in \overline{U_\downarrow}, \forall f \in Y_3$. Oleh sebab itu, $\exists g \in U_\downarrow$ dengan $d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Akibatnya $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ (dalam hal ini ambil $n = m$) sedemikian sehingga $\underline{S}_{n+1}(g) < \underline{S}_n(g)$, dan menurut lemma 4 berlaku juga $\overline{S}_{n+1}(g) < \overline{S}_n(g)$. Oleh karena itu, diperoleh $T_{n+1}(g) < T_n(g)$, dengan kata lain $\exists g \in B_3, d(f, g) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Kesimpulannya $f \in \overline{B_3}$.

Kedua fakta di atas menjelaskan bahwa $Y_2 \subseteq \overline{B_2}$ dan $Y_3 \subseteq \overline{B_3}$, sehingga berdasarkan definisi 6, terbukti bahwa B_2 dan B_3 berturut-turut *dense* pada Y_2 dan Y_3 . ■

4 Simpulan

Misalkan f berupa fungsi kontinu dan bernilai *real* pada interval $[a, b]$, atau dengan kata lain $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Berdasarkan pemaparan teori-teori di atas, dapat disimpulkan bahwa:

- Sifat monoton turun dari barisan *trapezoid sum* $\{T_n(f)\}$ secara umum tidak terjadi pada kelas fungsi f yang nonkonkaf (X_1).
- Barisan *trapezoid sum* $\{T_n(f)\}$ pada fungsi-fungsi nonkonkaf yang monoton, yaitu pada kelas fungsi f yang naik nonkonkaf (X_2) maupun turun nonkonkaf (X_3), secara umum juga tidak monoton turun.
- Pada kelas fungsi f yang nonkonveks (Y_1), sifat monoton naik dari barisan *trapezoid sum* $\{T_n(f)\}$ secara umum tidak terjadi.

- d. Barisan *trapezoid sum* $\{T_n(f)\}$ pada fungsi-fungsi nonkonveks yang monoton, yaitu pada kelas fungsi f yang naik nonkonveks (Y_2) maupun turun nonkonveks (Y_3), secara umum juga tidak monoton naik.

5 Daftar Pustaka

- [1] R. G. Bartle and D. R. Shertbert. *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. New Jersey, US: J Wiley, 2010.
- [2] W. Cheney and D. Kincaid. *Numerical Mathematics And Computing Sixth Edition*. Texas, US: Thomson Higher Education, 2008.
- [3] G. Bennet and G. Jameson, "Monotonic Averages of Convex Function", *Mathematical Analysis and Applications*, vol. 252, no. 1, pp. 410-436, 2000.
- [4] I. Kyrezi, "Monotonicity properties of Darboux sums," *Real Anal. Exch.*, vol. 35, no.1, pp. 43-64, 2010.
- [5] T. S. MA. *Banach-Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations*. Singapore: World Scientific Publishing, 2002.
- [6] D. Chatterjee. *Topology: General and Algebraic*. New Delhi, IN: New Age International Limited, 2007.
- [7] J. C. Oxtoby. *Measure and Category*. London, UK: Springer-Verlag, 1980.
- [8] M. Hochman, "Genericity in Topological Dynamics", *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 125-165, 2008.
- [9] G. M. Lee and T. S. Pham, "Generic Properties for Semialgebraic Programs", *SIAM Journal on Optimization*, vol. 27, no. 3, pp. 2061-2084, 2017.
- [10] G. M. Lee and T. S. Pham, "Stability and Genericity for Semialgebraic Compact Programs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 169, no. 5, pp. 473-495, 2016.
- [11] F. Balibrea, J. Smital, and M. Stefankova, "On Generic Properties of Nonautonomous Dynamical Systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 28, no. 8, p. 1850102, 2018.