Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 1, Mei 2022, 65-74
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i1.9627

Masalah Invers Pada Homogenisasi Periodik Persamaan *Hamilton-Jacobi*

Made Benny Prasetya Wiranata
Departemen Matematika FMIPA UGM, Jl. Bulaksumur, Yogyakarta 55281
e-mail: made.benny.prasetya.w@ugm.ac.id

Diajukan: 6 Juli 2021, Diperbaiki: 18 Februari 2022, Diterima: 30 Maret 2022

Abstrak

Persamaan *Hamilton-Jacobi* muncul dan berkembang dari masalah kontrol optimal pada bidang ekonomi. Eksistensi dan ketunggalan solusi lemah untuk masalah nilai awal persamaan *Hamilton-Jacobi* telah lama diselidiki dan dibuktikan keberadaannya. Selanjutnya, penelitian terkait persamaan *Hamilton-Jacobi* berkembang untuk menyelidiki solusi masalah asimptot persamaan *Hamilton-Jacobi* yang sekarang dikenal dengan homogenisasi periodik persamaan Hamilton-Jacobi. Pada paper ini dibahas masalah invers pada homogenisasi periodik persamaan *Hamilton-Jacobi* dimensi satu. Masalah invers ini menyelidiki keterkaitan antara *Hamiltonian* dan *effective Hamiltonian* yang bersesuaian secara terbalik. Pertama-tama, diberikan *Hamiltonian* $H_i(p,x) = H(p)V_i(x), i = 1,2$. Masing-masing *Hamiltonian* $H_i(x,p)$ diketahui berkorespondensi dengan *effective Hamiltonian* $\overline{H_\iota}$ melalui masalah sel (*cell problems*). Selanjutnya diselidiki keterkaitan antara kedua potensial V_i jika diketahui kedua *effective Hamiltonian* yang bersesuaian ekuivalen. Lebih lanjut, diperoleh bahwa jika *effective Hamiltonian* $\overline{H_1} \equiv \overline{H_2}$ maka V_1 bernilai konstan jika V_2 merupakan fungsi konstan, lebih khususnya $V_1 \equiv V_2$. Selain itu, jika $V_1 \leq V_2$ dan $(H^{-1})'$ merupakan fungsi tak negatif maka $V_1 \equiv V_2$. Kedua hasil tersebut menggambarkan kaitan antara distribusi kedua potensial dengan effective Hamiltoniannya.

Kata Kunci: *effective Hamiltonian*, persamaan *Hamilton-Jacobi*, masalah invers

Abstract

Hamilton-Jacobi equations are derived from optimal control problems arising in economics. Existence and uniqueness of weak solutions to initial value problems for Hamilton-Jacobi equations have long been investigated and proved. Further research has been conducted to search for solution of asymptotic problems for Hamilton-Jacobi equations that are well-known as periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations. The existence of effective Hamiltonian correspond to the Hamiltonian through cell problems was proved in non-linear way. In this paper, we investigate inverse problems for periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations in one dimension. The inverse problem investigates relations between the Hamiltonian and its corresponding effective Hamiltonian in reverse way. First, we are given Hamiltonians $H_i(p,x) = H(p)V_i(x), i = 1,2$. *Each Hamiltonian* $H_i(x,p)$ *is corresponding to effective Hamiltonian* $\overline{H_\iota}$. *After that, we investigate relations between both potentials* V_i *when the corresponding effective Hamiltonians are equivalent. Furthermore, we discover that if the effective Hamiltonian* $\overline{H_1} \equiv \overline{H_2}$ *then* V_1 *is constant provided* V_2 *is constant function, more specifically* $V_1 \equiv V_2$. *Moreover, if* $V_1 \leq V_2$ *and* $(H^{-1})'$ *is a nonnegative function then* $V_1 \equiv V_2$. *The result shows that the distribution of both potentials is related to the corresponding effective Hamiltonians.*

Keywords: *effective Hamiltonian, Hamilton-Jacobi equations, inverse problems*

1 Pendahuluan

Persamaan *Hamilton-Jacobi* merupakan persamaan diferensial parsial orde satu tak linear. Pada bukunya, Evans [4] menjelaskan hubungan antara persamaan *Hamilton-Jacobi* dan masalah kontrol optimal serta peranan solusi persamaan *Hamilton-Jacobi* untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal. Penelitian pada persamaan *Hamilton-Jacobi* beberapa dekade terakhir menekankan pada *well-posedness* dari persamaan ini. Di antaranya, eksistensi solusi, ketunggalan solusi serta laju konvergensinya. Pertanyaan-pertanyaan ini telah banyak terjawab untuk *Hamiltonian* yang bersifat konveks, namun secara umum belum terpecahkan sepenuhnya sehingga masih banyak masalah terbuka yang perlu diselidiki. Di luar *well-posedness*, terdapat beberapa masalah yang diselidiki di antaranya sifat-sifat solusi, masalah asimptot, masalah *blow-up* pada batas, dan masalah regularitas. Lions dkk [1] pada manuskrip yang tidak terpublikasi menyelidiki masalah asimptot persamaan *Hamilton-Jacobi* yang sekarang dikenal dengan homogenisasi periodik persamaan *Hamilton-Jacobi*. Persamaan *Hamilton-Jacobi* umumnya terkait dengan *Hamiltonian* H. Pada homogenisasi periodik persamaan *Hamilton-Jacobi*, solusi u^e dari masalah syarat awal yang berkorespondensi dengan *Hamiltonian* H^e, konvergen ke u yang merupakan solusi masalah syarat awal yang berkorespondensi dengan *effective Hamiltonian* $\overline{H}$. Hubungan antara *effective Hamiltonian* $\overline{H}$ dan *Hamiltonian* H terjalin secara *non-linear*.

Beberapa tahun terakhir, masalah homogenisasi periodik *Hamilton-Jacobi* telah dipelajari pada [2] dan [3] untuk dimensi satu. Selain itu, karakteristik *effective Hamiltonian* serta laju konvergensinya dipelajari pada [6] dan [9]. Selanjutnya, pada [5], [7], dan [8], dipelajari masalah homogenisasi ini serta diselidiki masalah invers untuk *effective Hamiltonian* H dalam bentuk separabel. Dengan memandang dua *Hamiltonian* $H_i(p,x) = H(p) + V_i(x)$, dimana V_i merupakan potensial untuk $i = 1,2$, Tran dkk. [5] menyelidiki hubungan V_1 dan V_2 ketika kedua *effective Hamiltonian* yang berkorespondensi ekuivalen yaitu $\overline{H_1} \equiv \overline{H_2}$. Pada dimensi satu, diperoleh hasil optimal bahwa kedua potensial memiliki distribusi yang sama jika dan hanya jika $\overline{H_1} \equiv \overline{H_2}$. Pada multi dimensi, hasil yang diperoleh sangat bergantung pada sifat *Hamiltonian* H. Khususnya, untuk $H(p) = \frac{1}{2}|p|^2$, diperoleh kedua potensial memiliki nilai *norm* L^2 yang sama. Di lain hal, untuk V_i yang merupakan fungsi trigonometri dengan beberapa *mode*, berlaku hubungan yang lebih kuat yaitu

$$V_1(x) = V_2\left(\frac{x}{c} + x_0\right).$$

Pada hasil penelitian sebelumnya, telah dibahas masalah invers pada homogenisasi periodik persamaan *Hamilton-Jacobi* untuk kasus *Hamiltonian* berbentuk separabel. Penyelidikan keterkaitan antara *Hamiltonian* dengan *effective Hamiltonian* yang bersesuaian perlu dilakukan untuk kasus lainnya. Sejauh pengamatan penulis, masalah invers untuk *Hamiltonian* berbentuk

$$H_1(x,p) = H(p)V_1(x)$$

belum dikerjakan. Untuk itu, penulis akan membahas masalah invers untuk kasus ini pada dimensi satu.

2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan metode penelitian kualitatif yang terdiri dari studi literatur, pengamatan masalah, pengembangan masalah, hipotesa, serta pembuktian hipotesa. Metode yang digunakan untuk pembuktian hipotesa dirangkum dari berbagai sumber literatur. Selanjutnya, hasil yang diperoleh diintepretasikan untuk menjawab masalah awal.

3 Hasil dan Pembahasan

Berikut diberikan deskripsi permasalahan serta beberapa hasil penelitian yang diperoleh peneliti lain yang diperlukan dalam pembahasan hasil pada paper ini. Pertama-tama diberikan definisi solusi *viscosity* dari masalah *Hamilton-Jacobi*. Diberikan masalah nilai awal

$$(H) \qquad \begin{cases} u_t(x,t) + H\big(x, u_x(x,t)\big) = 0 & \text{pada} \ \ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pada} \ \ \mathbb{R} \end{cases}$$

dengan *Hamiltonian* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan kondisi awal $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diberikan.

Definisi 1[4] *Suatu fungsi semikontinu atas* $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dikatakan subsolusi viscosity dari masalah nilai awal (H) jika*

- $u(\cdot,0) \le u_0$ *pada* $\mathbb{R}$,
- *untuk setiap* $\varphi \in C^1\big(\mathbb{R} \times (0,\infty)\big)$, *jika* $u - \varphi$ *mempunyai maksimum lokal di* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ *maka*

$$\varphi_t(x_0,t_0) + H\big(x_0, \varphi_x(x_0,t_0)\big) \le 0.$$

Suatu fungsi semikontinu bawah $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *dikatakan supersolusi viscosity dari masalah nilai awal (H) jika*

- $u(\cdot,0) \ge u_0$ *pada* $\mathbb{R}$,
- *untuk setiap* $\varphi \in C^1\big(\mathbb{R} \times (0,\infty)\big)$, *jika* $u - \varphi$ *mempunyai minimum lokal di* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ *maka*

$$\varphi_t(x_0,t_0) + H\big(x_0, \varphi_x(x_0,t_0)\big) \ge 0.$$

Suatu fungsi kontinu $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dikatakan solusi viscosity dari masalah nilai awal (H) jika* u *merupakan subsolusi viscosity dan supersolusi viscosity dari (H).*

Selanjutnya, kita beralih ke masalah homogenisasi periodik persamaan *Hamilton-Jacobi*. Diberikan fungsi $H : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bersifat koersif yaitu

$$H(x,p) \to +\infty \ \text{ ketika } \ |p| \to +\infty,$$

seragam untuk setiap $x \in \mathbb{T}$. Di sini didefinisikan *effective Hamiltonian* $\overline{H}$ melalui masalah sel (*cell problems*). Dipilih $p \in \mathbb{R}$, dicari konstan $\lambda_p \in \mathbb{R}$ sehingga terdapat solusi *viscosity* $v_p \in C(\mathbb{T})$ dari

$$(CP)_p \qquad H(x, p + v_p') = \lambda_p \quad \text{ pada } \ \mathbb{T}.$$

Misalkan bahwa terdapat dengan tunggal λ_p untuk setiap p, maka dapat didefinisikan $\overline{H}(p) \coloneqq \lambda_p$. Secara umum, kita tidak memiliki ketunggalan solusi *viscosity* dari $(CP)_p$ bahkan dengan penambahan konstan. Pada teorema berikut diberikan eksistensi dan ketunggalan λ_p.

Teorema 2[1] *Asumsikan* $H \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ *bersifat koersif. Maka untuk setiap* $p \in \mathbb{R}$, *terdapat dengan tunggal* $\lambda_p \in \mathbb{R}$ *sehingga* $(CP)_p$ *mempunyai solusi viscosity* v_p *pada* $\mathbb{T}$.

Dengan teorema di atas, maka eksistensi *effective Hamiltonian* dijamin. Pada penelitian ini, kita asumsikan *Hamiltonian* berbentuk multiplikasi yaitu $H_i(x,p) = H(p)V_i(x), i = 1,2$ dengan $V_i \in C(\mathbb{T})$. Jika kedua *effective Hamiltonian* sama yaitu $\overline{H_1} \equiv \overline{H_2}$ diperoleh beberapa hasil terkait hubungan potensial V_1 dan V_2. Hasil pertama yang diperoleh adalah ketika salah satu dari V_i merupakan fungsi konstan maka yang lainnya juga konstan bahkan keduanya sama. Namun sebelum lanjut pada hasil tersebut, diberikan lemma berikut.

Lemma 3 *Diberikan* $p_0 \in \mathbb{R}$. *Misalkan* $0 < V_1 \le 1$ *dan* $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *adalah solusi viscosity dari*

$$(\Delta)_{HV_1} \qquad \begin{cases} u_t(x,t) + H\big(u_x(x,t)\big)V_1(x) = 0 & \text{pada } \ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = p_0 x & \text{pada } \ \mathbb{R} \end{cases}$$

Misalkan lebih lanjut bahwa $\min H > 0$ *dan* H *terdiferensial pada* p_0 *serta terdapat titik* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ *sedemikian sehingga*

$$u(x_0, t_0) = p_0 x_0 - H(p_0) t_0 \tag{1}$$

maka

$$V_1\big(x_0 - (t_0 - s)H'(p_0)\big) = 1$$

untuk setiap $s \in [0, t_0]$.

Bukti. Pertama dipilih *Hamiltonian* konveks dan superlinier $\widehat{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\widehat{H} \ge H$, $\widehat{H}$ terdiferensial pada p_0,

$$\widehat{H}(p_0) = H(p_0) \quad \text{dan} \quad \widehat{H}'(p_0) = H'(p_0).$$

Di sini superlinier berarti fungsi $\widehat{H}$ memenuhi $\frac{\widehat{H}}{|p|} \to \infty$ saat $|p| \to \infty$. Misalkan $\hat{u}$ adalah solusi *viscosity* tunggal untuk $(\Delta)_{\widehat{H}V_1}$. Karena $\widehat{H} \geq H$, maka diperoleh bahwa $\hat{u}$ adalah subsolusi *viscosity* untuk $(\Delta)_{HV_1}$. Akibatnya, berdasarkan prinsip perbandingan [6] (*comparison principle*), diperoleh bahwa $u \geq \hat{u}$. Lebih lanjut, dapat dikonfirmasi bahwa $v(x,t) = p_0 x - \widehat{H}(p_0)t$ adalah solusi klasik untuk $(\Delta)_{\widehat{H}}$. Sekali lagi dengan prinsip perbandingan, diperoleh $\hat{u} \geq v$ karena $\widehat{H}V_1 \leq \widehat{H}$. Dengan demikian, didapat

$$u(x,t) \geq \hat{u}(x,t) \geq p_0 x - \widehat{H}(p_0)t = p_0 x - H(p_0)t.$$

Selanjutnya, berdasarkan (1) diperoleh bahwa $\hat{u}(x_0,t_0) = p_0 x - \widehat{H}(p_0)t_0$. Lebih lanjut, berdasarkan formula kontrol optimal [4],

$$\hat{u}(x_0,t_0) = \min_{\mu(t_0)=x_0, \mu\in AC([0,t_0])} \left\{ p_0\mu(0) + \int_0^{t_0} V_1(\mu(s))\hat{L}\left(\frac{\mu'(s)}{V_1(\mu(s))}\right) ds \right\} \tag{2}$$

dimana $AC([0,t_0])$ menyatakan himpunan semua fungsi kontinu mutlak pada $[0,t_0]$ dan $\hat{L}$ adalah dual konveks atau *Lagrangian* yang bersesuaian dengan $\widehat{H}$. Misalkan $\xi \in AC([0,t_0])$ dengan $\xi(t_0) = x_0$ adalah kurva minimal pada (2) sehingga

$$\hat{u}(x_0,t_0) = p_0\xi(0) + \int_0^{t_0} V_1(\xi(s))\hat{L}\left(\frac{\xi'(s)}{V_1(\xi(s))}\right) ds.$$

Karena berlaku juga

$$\hat{L}\left(\frac{\xi'(s)}{V_1(\xi(s))}\right) + \widehat{H}(p_0) \geq p_0 \frac{\xi'(s)}{V_1(\xi(s))}$$

hampir dimana-mana pada $[0,t_0]$, diperoleh

$$\begin{aligned}
& p_0\xi(0) + \int_0^{t_0} V_1(\xi(s))\hat{L}\left(\frac{\xi'(s)}{V_1(\xi(s))}\right) ds \\
\geq\ & p_0\xi(0) + \int_0^{t_0} V_1\big(\xi(s)\big)\left(p_0 \frac{\xi'(s)}{V_1\big(\xi(s)\big)} - \widehat{H}(p_0)\right) ds \\
=\ & p_0\xi(0) + \int_0^{t_0} p_0\xi'(s)\, ds - \int_0^{t_0} V_1\big(\xi(s)\big)\widehat{H}(p_0)\, ds \\
=\ & p_0\xi(0) + (p_0\xi(t_0) - p_0\xi(0)) - \int_0^{t_0} V_1\big(\xi(s)\big)\widehat{H}(p_0)\, ds \\
=\ & p_0\xi(t_0) - \int_0^{t_0} \widehat{H}(p_0)\, ds + \widehat{H}(p_0)\int_0^{t_0} (1 - V_1\big(\xi(s)\big))\, ds \\
=\ & p_0\xi(t_0) - \widehat{H}(p_0)t_0 + \widehat{H}(p_0)\int_0^{t_0} (1 - V_1\big(\xi(s)\big))\, ds \\
\geq\ & p_0\xi(t_0) - \widehat{H}(p_0)t_0 = \hat{u}(x_0,t_0).
\end{aligned}$$

Sebagai akibatnya,

$$\hat{L}\left(\frac{\xi'(s)}{V_1(\xi(s))}\right) + \widehat{H}(p_0) = p_0\frac{\xi'(s)}{V_1(\xi(s))}$$

hampir dimana-mana pada $[0, t_0]$ dan $V_1(\xi(s)) = 1$ untuk setiap $s \in [0, t_0]$. Dengan demikian, karena $\frac{\xi\prime(s)}{V_1(\xi(s))} = \widehat{H}'(p_0) = H'(p_0)$ maka $\xi'(s) = H'(p_0)V_1(\xi(s)) = H'(p_0)$ hampir dimana-mana pada $[0, t_0]$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$V_1(\xi(s)) = V_1(x_0 - (t_0 - s)H'(p_0)) = 1$$

untuk setiap $s \in [0, t_0]$. ■

Teorema 4 *Asumsikan* $V_2 \equiv 1$. *Misalkan terdapat* $p_0 \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga* $H \in C(\mathbb{R})$, $\min H > 0$, *terdiferensial pada* p_0 *dan* $H'(p_0)$ *adalah bilangan irasional maka*

$$\overline{H_1}(p_0) = \overline{H_2}(p_0) \quad dan \quad \min_{\mathbb{R}} \overline{H_1} = \min_{\mathbb{R}} \overline{H_2} \qquad \Longrightarrow \qquad V_1 \equiv 1.$$

Lebih khususnya,

$$\overline{H_1} \equiv \overline{H_2} \quad \Rightarrow \quad V_1 \equiv 1.$$

Sebelum diberikan bukti teorema di atas, dapat dilakukan generalisasi untuk sebarang fungsi konstan positif. Misalkan $H_2(x,p) = H(p)c$ untuk suatu $c > 0$ maka $\overline{H_2}(p) = H(p)c$. Jika $H_1(x,p) = H(p)V_1(x)$ dan kondisi pada Teorema 4[2] dipenuhi maka jika $\overline{H_2}(p) = H(p)c$ dan $H_1(x,p) = (H(p)c)V_1/c$ diperoleh $\frac{V_1(x)}{c} = 1$ atau $V_1 \equiv c$.

Bukti. Berdasarkan hipotesa awal, diperoleh $\overline{H_2} = H$. Lebih lanjut, diklaim bahwa

$$\min_{\mathbb{R}} \overline{H_1} = \left(\min_{\mathbb{R}} H\right)\left(\max_{\mathbb{R}} V_1\right) \tag{3}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $p \in \mathbb{R}$,

$$\overline{H_1}(p) \le H(p) \max_{\mathbb{R}} V_1$$

yang berakibat

$$\min_{\mathbb{R}} \overline{H_1} \le \left(\min_{\mathbb{R}} H\right)\left(\max_{\mathbb{R}} V_1\right).$$

Di sisi lain, misalkan v_p adalah solusi *viscosity* dari $(CP)_p$ dan $y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $V_1(y) = \max_{\mathbb{R}} V_1$. Maka

$$\left(\min_{\mathbb{R}} H\right)\left(\max_{\mathbb{R}} V_1\right) \le H(p + v'(y))V_1(y) = \overline{H_1}(p)$$

dalam arti *viscosity* untuk setiap $p \in \mathbb{R}$. Akibatnya,

$$\left(\min_{\mathbb{R}} H\right)\left(\max_{\mathbb{R}} V_1\right) \le \min_{\mathbb{R}} \overline{H_1}.$$

Selanjutnya, berdasarkan (3) dan karena

$$\min_{\mathbb{R}} \overline{H_1} = \min_{\mathbb{R}} \overline{H_2} = \min_{\mathbb{R}} H > 0$$

maka

$$\max_{\mathbb{R}} V_1 = 1.$$

Perhatikan bahwa $0 < V_1(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tanpa mengurangi keumuman, dapat diasumsikan bahwa $V_1 \neq 1$ sehingga untuk suatu bilangan $r > 0$,

$$0 < V_1(x) < 1, \qquad \forall x \in (-r, r). \tag{4}$$

Perhatikan bahwa $Q = H'(p_0)$ adalah bilangan rasional. Kita klaim bahwa terdapat $T > 0$ sehingga untuk setiap $x \in [0,1]$, terdapat $t_x \in [0, T], z_x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$|x - t_x Q - z_x| \leq \frac{r}{2}. \tag{5}$$

Untuk membuktikan klaim ini, dimisalkan

$$\left\{B\left(x_i, \frac{r}{4}\right)\right\}_{i \in \{1,2,\dots,N\}}, \quad N \in \mathbb{N}$$

adalah liput berhingga dari $[0,1]$ dimana $x_i \in [0,1]$ untuk setiap i. Selanjutnya, untuk setiap $i \in \{1,2,\dots,N\}$, karena Q adalah bilangan irasional, terdapat $t_i \geq 0$ dan $z_i \in \mathbb{Z}$ sehingga $t_i Q + z_i \in B(x_i, \frac{r}{4})$. Akibatnya, untuk setiap $x \in B(x_i, \frac{r}{4})$ diperoleh

$$|x - t_i Q + z_i| < \frac{r}{2}.$$

Jadi, klaim benar dengan mengambil

$$T = \max\{t_i \mid i \in \{1,2,\dots,N\}\}.$$

Misalkan $u(x,t)$ adalah solusi *viscosity* untuk $(\Delta)_{HV_1}$, maka peta $x \mapsto u(x,t) - p_0 x$ adalah $\mathbb{T}$-periodik untuk setiap $t \geq 0$. Berdasarkan Lemma 3[1], diperoleh

$$u(x,T) \geq p_0 x - H(p_0)T \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Asumsikan bahwa terdapat $x_0 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$u(x_0, T) = p_0 x_0 - H(p_0)T.$$

Akibatnya, berdasarkan Lemma 3[1] diperoleh

$$V_1\big(x_0 - (T - s)H'(p_0)\big) = 1 \qquad \forall s \in [0, T].$$

Dengan sifat periodik, dapat diasumsikan $x_0 \in [0,1]$. Jadi, pertidaksamaan (5) berakibat terdapat $t_{x_0} \in [0, T]$ dan $z_{x_0} \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\left|x_0 - t_{x_0} Q - z_{x_0}\right| \leq r/2$. Akibatnya,

$$1 = V_1\left(x_0 - t_{x_0} H'(p_0)\right) = V_1\big(x_0 - t_{x_0} Q - z_{x_0}\big) < 1.$$

Hal ini menyebabkan kontradiksi. Dengan demikian,

$$u(x,T) > p_0 x - H(p_0)T \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berdasarkan sifat periodik dan kontinu dari $u(x,T)-p_0x$, diperoleh

$$\delta := \min_{\mathbb{R}}\{u(x,T)-p_0x+H(p_0)T\} > 0. \tag{6}$$

Dinotasikan

$$u_1(x,t) := u(x,t+T)+h(p_0)T-\delta, \qquad \forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty).$$

Berdasarkan pertidaksamaan (6), $u_1(x,0)\geq p_0x = u(x,0), \forall x\in\mathbb{R}$. Akibatnya, berdasarkan prinsip perbandingan diperoleh $u_1 \geq u$ dan juga

$$\min_{\mathbb{R}}\{u_1(x,T)-p_0x+H(p_0)T\}\geq\delta.$$

Selanjutnya, untuk $m\geq 2$, didefinisikan

$$u_m(x,t) := u_{m-1}(x,t+T)+H(p_0)T-\delta, \qquad \forall(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty).$$

Dengan menggunakan argumen yang serupa dan induksi, dapat diperoleh bahwa $u_m\geq u$ dan

$$\min_{\mathbb{R}}\{u_m(x,T)-p_0x+H(p_0)T\}\geq\delta, \quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $x\in\mathbb{R}$ dan $n\in\mathbb{N}$,

$$u(x,mT)\geq p_0x-H(p_0)mT+m\delta$$

sehingga

$$H(p_0)=\overline{H_1}(p_0)=\lim_{m\to\infty}-\frac{u(0,mT)}{mT}\leq H(p_0)-\frac{\delta}{T}$$

yang berakibat kontradiksi. Jadi, $V_1\equiv 1$. ■

Teorema 5 *Diberikan $V_1, V_2\in C(\mathbb{T})$ dengan $V_1\leq V_2$ serta H naik monoton kuat dan mulus. Jika $\overline{H_1}=\overline{H_2}$ serta $(H^{-1})'>0$ pada $(0,\infty)$ maka $V_1\equiv V_2$.*

Bukti. Perhatikan bahwa $\min_{\mathbb{R}}\overline{H_i}=\min_{\mathbb{R}}H\max_{\mathbb{R}}V_i$, $i=1,2$ sehingga $\max_{\mathbb{R}}V_1=\max_{\mathbb{R}}V_2$. Terdapat δ sehingga untuk $i=1,2$ dan $c\geq H(\delta)$

$$\max\{p\in\mathbb{R}: \overline{H_i}(p)=c\}=\int_0^1\psi\left(\frac{c}{V_i(x)}\right)dx.$$

Akibatnya,

$$\int_0^1\psi\left(\frac{\lambda}{V_1(x)}\right)dx=\int_0^1\psi\left(\frac{\lambda}{V_2(x)}\right)dx \qquad \forall\lambda\geq H(\delta)$$

sehingga

$$\int_0^1\psi(\lambda\overline{V}_1(x))\,dx=\int_0^1\psi(\lambda\overline{V}_2(x))\,dx \qquad \forall\lambda\geq H(\delta)$$

dengan $\overline{V_i}(x)=\frac{1}{V_i(x)}$, $i=1,2$. Selanjutnya, diperoleh

$$\int_1^a\psi(\lambda t)\,dF_1(t)=\int_1^a\psi(\lambda t)\,dF_2(t) \qquad \forall\lambda\geq H(\delta)$$

dengan $F_i(t) := |\{x \in [0,1] : \overline{V_i}(x) \leq t\}|$ adalah distribusi fungsi $\overline{V_i}, i = 1,2$ dan $a \geq \max\{\max \overline{V_1}, \max \overline{V_2}\}$. Dinotasikan $G(t) := F_2(t) - F_1(t),\ t \in [0,a]$. Jadi, $G \in BV[0,a]$ dan $G(t) \geq 0, t \in [0,a]$. $BV[0,a]$ menyatakan himpunan semua fungsi bervariasi terbatas pada $[0,a]$. Untuk $\lambda \geq H(\delta)$ diperoleh

$$G(a) = G(0) = 0$$

dan

$$\int_0^a \psi(\lambda t) dG(t) = 0.$$

Dengan memanfaatkan integral parsial diperoleh

$$\int_{1/2}^a \psi'(\lambda t) G(t) dt = 0.$$

Dipilih $m \in \mathbb{N} \cap [H(\delta) + 1, \infty)$ dan $x_m \in I_m = \left[\frac{m}{2}, m + a\right]$ sehingga

$$|\psi'(x_m)| = \max_{x \in I_m} |\psi'(x)|.$$

Selanjutnya, karena

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x \in I_m} \frac{|\psi'(x) - \psi'(x_m)|}{|\psi'(x_m)|} \leq \lim_{m\to\infty} \max_{x \in I_m} \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right) m |\psi''(x)|}{|\psi'(x)|} = 0$$

berakibat,

$$\int_{1/2}^a G(t)\, dt = \lim_{m\to\infty} \int_{1/2}^a \frac{\psi'(x_m) - \psi'(mt)}{\psi'(x_m)} G(t) dt = 0.$$

Karena $G(t) \geq 0, t \in \left[\frac{1}{2}, a\right]$ maka $G \equiv 0$ hampir dimana-mana pada $\left[\frac{1}{2}, a\right]$. Dengan demikian, $F_1(t) = F_2(t)$ hampir dimana-mana pada $[1, a]$. Karena F_1 dan F_2 kontinu kanan, diperoleh $F_1 \equiv F_2$ yang berakibat $V_1 = V_2$. ■

4 Simpulan

Penelitian ini mempelajari hubungan atau kaitan dua fungsi potensial ketika kedua *effective Hamiltonian* ekuivalen. Hasil pertama mengatakan bahwa kedua potensial akan bernilai konstan jika salah satu potensial bernilai konstan. Lebih khususnya, keduanya merupakan fungsi yang sama. Berdasarkan hasil kedua, jika selisih keduanya tak negatif maka keduanya haruslah sama. Dari fakta diatas dapat disimpulkan bahwa keterkaitan kedua potensial dalam hal distribusi dipengaruhi oleh *effective Hamiltonian* yang bersesuaian sama. Kedepannya akan diselidiki lebih lanjut sifat apa saja yang tetap dipertahankan kedua potensial ketika *effective Hamiltonian* yang bersesuaian ekuivalen.

5 Daftar Pustaka

[1] P. L. Lions, G. C. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan, "Homogenization of Hamilton-Jacobi equations," Unpublished preprint, 1987.

[2] M. Concordel, "Periodic Homogenization of Hamilton-Jacobi equations I: additive eigenvalues and variational formula," *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 45, pp. 1095-1117, 1996.

[3] M. Concordel, "Periodic Homogenization of Hamilton-Jacobi equations II: eikonal equations," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 127, pp. 665-689, 1997.

[4] L. C. Evans, *Partial Differential Equations Second Edition*, American Mathematical Society, 2010.

[5] S. Luo, H. V. Tran, and Y. Yu, "Some inverse problems in periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations," *Arc. Ration. Mech. Anal.*, vol. 221, no. 3, pp. 1585-1617, 2016.

[6] N. Le, H. Mitake, and H. V. Tran, *Dynamical and Geometric Aspects of Hamilton-Jacobi and Linearized Monge-Ampère Equations,* Lectures Notes in Mathematics, 2016.

[7] W. Jing, H.V. Tran, and Y.Yu, "Inverse problems, non-roundness and flat pieces of the effective burning velocity from an inviscid quadratic Hamilton-Jacobi model," *Nonlinearity*, vol. 30, pp. 1853-1875, 2017.

[8] H. V. Tran and Y.Yu, "A rigidity result for effective Hamiltonians with 3-mode perodic potentials," *Advanced in Math.*, vol. 334, pp. 300-321, 2018.

[9] H. Mitake, H. V. Tran, and Y. Yu, "Rate of convergence in periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations: the convex setting," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 233, no. 2, pp. 901-934, 2019.