Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 2, Nopember 2022, 183-189
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i2.9790

Homomorfisma Ring Matriks atas Ring Semigrup

Listiana [1], Ahmad Faisol [2]*, Fitriani [3]
[1, 2, 3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Bandar Lampung, Lampung, Indonesia
E-mail: [1]listiana864@gmail.com, *[2]ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id, [3]fitriani.1984@fmipa.unila.ac.id

Diajukan: 22 Juli 2021, Diperbaiki: 27 Juni 2022, Diterima: 7 Nopember 2022

Abstrak

Diberikan sebarang ring R dan semigrup S. Ring semigrup $R[S]$ adalah himpunan semua fungsi f dari S ke R dengan $supp(f)$ berhingga yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang sama pada ring polinomial $R[X]$. Di sisi lain, ring matriks $M_n(R)$ adalah himpunan semua matriks atas ring R berukuran $n \times n$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Di dalam penelitian ini, didefinisikan ring matriks $M_n(R_1[S_1])$ dan $M_n(R_2[S_2])$ dengan R_1, R_2 ring dan S, S_2 semigrup. Selain itu, didefinisikan pemetaan τ dari $M_n(R_1[S_1])$ ke $M_n(R_2[S_2])$ dengan menggunakan homomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$. Selanjutnya, dibuktikan τ merupakan homomorfisma ring. Lebih lanjut, diberikan syarat cukup agar τ merupakan monomorfisma.

Kata Kunci: ring semigrup, homomorfisma semigrup, homomorfisma ring, matriks atas ring, ring matriks.

Abstract

Let R be a ring, and S be a semigroup. The semigroup ring $R[S]$ is the set of all functions f from S to R with finite $\mathrm{supp}(f)$, which is completed with the same addition and multiplication operations on the polynomial ring $R[X]$. On the other hand, the matrix ring $M_n(R)$ is the set of all matrices on the ring R of size $n \times n$ equipped with addition and matrix multiplication operations. In this research, the matrix rings $M_n(R_1[S_1])$ and $M_n(R_2[S_2])$ are constructed with R_1, R_2 are rings, and S, S_2 semigroups. In addition, a mapping τ from $M_n(R_1[S_1])$ to $M_n(R_2[S_2])$ is defined using semigroup homomorphism $\delta: S_1 \to S_2$ and ring homomorphism $\mu: R_1 \to R_2$. Furthermore, it is proved that τ is a ring homomorphism. Moreover, sufficient conditions are given for τ to be a monomorphism.

***Keywords**: semigroup rings, semigroup homomorphisms, ring homomorphisms, a matrix over rings, matrix rings.*

1 Pendahuluan

Di dalam [1] telah dijelaskan bahwa matriks adalah susunan objek-objek matematika dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang yang diapit oleh kurung siku atau kurung biasa. Objek-objek matematika ini biasa disebut entri-entri. Jika entri-entri matriks merupakan anggota dari suatu ring, maka matriks tersebut disebut matriks atas ring [2]. Beberapa penelitian terkait matriks atas ring dapat dilihat pada [3-6]. Suatu ring didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma [7]. Contoh ring yang sudah dikenal diantaranya ring polinomial $R[X]$ dan ring deret pangkat $R[[X]]$ [8]. Ring polinomial $R[X]$ dapat dipandang sebagai himpunan semua fungsi f dari semigrup $\mathbb{N}\cup\{0\}$ ke ring R dengan $supp(f) = \{s \in \mathbb{N}\cup\{0\} | f(s) \neq 0\}$ berhingga yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan fungsi dan pergandaan konvolusi. Selanjutnya, Gilmer [9] memperumum ring polinomial $R[X]$ dengan cara mengeneralisasi semigrup $\mathbb{N}\cup\{0\}$ menjadi sebarang semigrup S. Ring ini selanjutnya disebut ring semigrup dan dinotasikan dengan $R[S]$. Beberapa penelitian terkait ring semigrup dapat dilihat pada [10-12].

Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ atas ring R yang dinotasikan dengan $M_n(R)$ merupakan suatu ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Ring ini selanjutnya disebut ring matriks. Salah satu konsep penting di dalam struktur ring adalah homomorfisma ring, yaitu suatu pemetaan dari ring ke ring yang mempertahankan operasi biner pada ring-ring tersebut. Di dalam [13], telah dikaji tentang homomorfisma ring matriks σ dari $M_n(R_1)$ ke $M_n(R_2)$ yang didefinisikan oleh $\sigma([a_{ij}]) = [\mu(a_{ij})]$ untuk setiap $a_{ij} \in R_1$ dengan $\mu: R_1 \to R_2$ merupakan homomorfisma ring. Dalam perkembangannya, beberapa penelitian terkait homomorfisma ring matriks dapat dilihat pada [14-16]. Konstruksi homomorfisma ring matriks ini, memberikan motivasi untuk mengkaji homomorfisma ring pada ring matriks atas ring semigrup. Oleh karena itu, pada penelitian ini dikonstruksi ring matriks atas ring semigrup $M_n(R_1[S_1])$ dan $M_n(R_2[S_2])$ dengan R_1, R_2 adalah ring dan S_1, S_2 adalah semigrup. Selanjutnya, didefinisikan suatu pemetaan τ dari $M_n(R_1[S_1])$ ke $M_n(R_2[S_2])$ dengan menggunakan homomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$. Kemudian ditunjukkan τ merupakan homomorfisma ring matriks. Selain itu, diberikan syarat perlu dan cukup agar τ merupakan monomorfisma.

2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan di dalam penelitian ini adalah studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal imiah, khususnya terkait teori semigrup, teori ring, teori homomorfisma semigrup, teori homomorfisma ring, teori ring polinomial, teori ring semigrup, teori matriks atas ring, dan teori homomorfisma matriks atas ring.

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Menentukan ring R_1 dan R_2 serta semigrup S_1 dan S_2.
2) Mendefinisikan ring semigrup $R_1[S_1]$ dan $R_2[S_2]$.
3) Mendefinisikan ring matriks atas ring semigrup $M_n(R_1[S_1])$ dan $M_n(R_2[S_2])$.
4) Mengkonstruksi homomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$.
5) Mendefinisikan pemetaan $\tau: M_n(R_1[S_1]) \to M_n(R_2[S_2])$ dengan $\tau([f_{ij}]) = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}]$

untuk setiap $f_{ij} \in M_n(R_1[S_1])$.

6) Membuktikan pemetaan τ merupakan homomorfisma ring
7) Menentukan syarat cukup τ merupakan monomorfisma.

3 Hasil dan Pembahasan

Diberikan ring R_1 dan R_2 serta semigrup S_1 dan S_2 terhadap operasi penjumlahan, sehingga dapat dikonstruksi ring semigrup $R_1[S_1]$ dan $R_2[S_2]$, yaitu himpunan

$$R_1[S_1] = \{f: S_1 \to R_1 | supp(f) \text{ berhingga}\} \quad (1)$$

dan

$$R_2[S_2] = \{\alpha: S_2 \to R_2 | supp(\alpha) \text{ berhingga}\} \quad (2)$$

dengan $supp(f) = \{s \in S_1 | f(s) \neq 0\}$ dan $supp(\alpha) = \{t \in S_2 | \alpha(t) \neq 0\}$, yang dilengkapi operasi penjumlahan fungsi

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \qquad \text{dan} \qquad (\alpha + \beta)(t) = \alpha(t) + \beta(t) \quad (3)$$

dan operasi perkalian fungsi

$$(fg)(s) = \sum_{\substack{x+y=s \\ x,y \in S_1}} f(x)g(y) \qquad \text{dan} \qquad (\alpha\beta)(t) = \sum_{\substack{u+v=t \\ u,v \in S_2}} f(u)g(v), \quad (4)$$

untuk setiap $s \in S_1, f, g \in R_1[S_1]$ dan $t \in S_2, \alpha, \beta \in R_2[S_2]$.

Selanjutnya dikonstruksi ring matriks $M_n(R_1[S_1])$ dan $M_n(R_2[S_2])$, yaitu himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ atas ring semigrup $R_1[S_1]$ dan $R_2[S_2]$:

$$M_n(R_1[S_1]) = \{[f_{ij}] | f_{ij} \in R_1[S_1]; i, j = 1, 2, \cdots, n\} \quad (5)$$

dan

$$M_n(R_2[S_2]) = \{[\alpha_{ij}] | \alpha_{ij} \in R_2[S_2]; i, j = 1, 2, \cdots, n\} \quad (6)$$

yang dilengkapi operasi penjumlahan matriks

$$[f_{ij}] + [g_{ij}] = [f_{ij} + g_{ij}] \qquad \text{dan} \qquad [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] \quad (7)$$

dan operasi perkalian matriks

$$[f_{ij}][g_{ij}] = [h_{ij}] \qquad \text{dan} \qquad [\alpha_{ij}][\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}], \quad (8)$$

dengan $h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} g_{kj}$ dan $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj}$, untuk setiap $[f_{ij}], [g_{ij}] \in M_n(R_1[S_1])$ dan $[\alpha_{ij}], [\beta_{ij}] \in M_n(R_2[S_2])$.

Selanjutnya, diberikan homomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$. Sebelum membuktikan hasil utama penelitian ini, diperlukan dua lema berikut.

Lema 1 *Diberikan ring semigrup* $R_1[S_1]$ *dan* $R_2[S_2]$. *Jika diberikan isomorfisma semigrup* $\delta: S_1 \to S_2$ *dan homomorfisma ring* $\mu: R_1 \to R_2$, *maka* $\mu \circ (f+g) \circ \delta^{-1} = (\mu \circ f \circ \delta^{-1}) + (\mu \circ g \circ \delta^{-1})$ *dan* $\mu \circ (fg) \circ \delta^{-1} = (\mu \circ f \circ \delta^{-1})(\mu \circ g \circ \delta^{-1})$ *untuk setiap* $f, g \in R_1[S_1]$.

Bukti Untuk setiap $t \in S_2$, $\mu \circ (f+g) \circ \delta^{-1}(t) = \mu\Big((f+g)\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big)$. Berdasarkan operasi penjumlahan (3) didapat $\mu\Big((f+g)\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big) = \mu\Big(f\big(\delta^{-1}(t)\big) + g\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big)$. Karena μ homomorfisma ring, diperoleh $\mu\Big(f\big(\delta^{-1}(t)\big) + g\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big) = \mu\Big(f\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big) + \mu\Big(g\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big)$. Oleh karena itu, $\mu \circ (f+g) \circ \delta^{-1}(t) = (\mu \circ f \circ \delta^{-1})(t) + (\mu \circ f \circ \delta^{-1})(t)$. Dengan kata lain terbukti $\mu \circ (f+g) \circ \delta^{-1} = (\mu \circ f \circ \delta^{-1}) + (\mu \circ g \circ \delta^{-1})$.

Selanjutnya, untuk setiap $t \in S_2$, $\mu \circ (fg) \circ \delta^{-1}(t) = \mu\Big((fg)\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big)$. Berdasarkan operasi perkalian (4) didapat $\mu\Big((fg)\big(\delta^{-1}(t)\big)\Big) = \mu\Bigg(\sum_{\substack{x+y=\delta^{-1}(t) \\ x,y\in S_1}} f(x)g(y)\Bigg)$. Karena μ homomorfisma ring, diperoleh

$$\mu\Big(\sum_{x+y=\delta^{-1}(t)} f(x)g(y)\Big) = \sum_{\substack{x+y=\delta^{-1}(t) \\ x,y\in S_1}} \mu\big(f(x)g(y)\big) = \sum_{\substack{x+y=\delta^{-1}(t) \\ x,y\in S_1}} \mu\big(f(x)\big)\mu\big(g(y)\big).$$

Karena δ isomorfisma semigrup, terdapat $u, v \in S_2$ sehingga $\delta^{-1}(u) = x$ dan $\delta^{-1}(v) = y$. Akibatnya,

$$\sum_{\substack{x+y=\delta^{-1}(t) \\ x,y\in S_1}} \mu\big(f(x)\big)\mu\big(g(y)\big) = \sum_{\delta^{-1}(u)+\delta^{-1}(v)=\delta^{-1}(t)} \mu\Big(f\big(\delta^{-1}(u)\big)\Big)\mu\Big(g\big(\delta^{-1}(v)\big)\Big).$$

Oleh karena itu,

$\mu \circ (fg) \circ \delta^{-1}(t) = \sum_{u+v=t} (\mu \circ f \circ \delta^{-1})(u)(\mu \circ g \circ \delta^{-1})(v) = (\mu \circ f \circ \delta^{-1})(\mu \circ g \circ \delta^{-1})(t)$.

Dengan kata lain terbukti $\mu \circ (fg) \circ \delta^{-1} = (\mu \circ f \circ \delta^{-1})(\mu \circ g \circ \delta^{-1})$. ■

Selanjutnya, eksistensi $\alpha \in R_2[S_2]$ dengan $\alpha = \mu \circ f \circ \delta^{-1}$, diberikan pada lema berikut.

Lema 2 *Diberikan ring semigrup* $R_1[S_1]$ *dan* $R_2[S_2]$. *Jika diberikan isomorfisma semigrup* $\delta: S_1 \to S_2$ *dan homomorfisma ring* $\mu: R_1 \to R_2$, *maka untuk setiap* $f \in R_1[S_1]$ *terdapat* $\alpha \in R_2[S_2]$ *dengan* $\alpha = \mu \circ f \circ \delta^{-1}$.

Bukti Untuk membuktikan terdapat $\alpha \in R_2[S_2]$ dengan $\alpha = \mu \circ f \circ \delta^{-1}$, cukup ditunjukkan $supp(\alpha)$ berhingga. Jika himpunan tak kosong Y berhingga, maka jelas sebarang $X \subseteq Y$ juga berhingga. Karena $f \in R_1[S_1]$, jelas $supp(f)$ berhingga. Akibatnya, $\delta\big(supp(f)\big)$ juga berhingga karena δ merupakan isomorfisma semigrup. Berdasarkan fakta-fakta ini, untuk menunjukkan $supp(\alpha)$ berhingga cukup dengan menunjukkan $supp(\alpha) \subseteq \delta\big(supp(f)\big)$. Untuk sebarang $t \in$

$supp(\alpha)$, jelas $\alpha(t) \neq 0$. Akibatnya, $\mu \circ f \circ \delta^{-1}(t) \neq 0$. Dengan kata lain, $\mu\left(f\left(\delta^{-1}(t)\right)\right) \neq 0$. Karena μ homomorfisma ring, maka didapat $f\left(\delta^{-1}(t)\right) \neq 0$. Oleh karena itu, terdapat $s \in supp(f)$ sehingga $t = \delta(s)$. Dengan kata lain, $t \in \delta\left(supp(f)\right)$. Jadi, terbukti $supp(\alpha) \subseteq \delta\left(supp(f)\right)$ yang berakibat $supp(\alpha)$ berhingga. ■

Teorema 3 *Misalkan $R_1[S_1]$, $R_2[S_2]$ adalah ring semigrup, dan $M_n(R_1[S_1])$, $M_n(R_2[S_2])$ adalah ring matriks atas ring semigrup. Jika diberikan isomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$, maka pemetaan $\tau: M_n(R_1[S_1]) \to M_n(R_2[S_2])$ dengan $\tau([f_{ij}]) = [\alpha_{ij}] = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}]$ untuk setiap $[f_{ij}] \in M_n(R_1[S_1])$, merupakan homomorfisma ring.*

Bukti Berdasarkan Lema 2, untuk $i, j = 1, 2, \cdots, n$, didapat $\alpha_{ij} = \mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1} \in R_2[S_2]$ untuk setiap $f_{ij} \in R_1[S_1]$. Oleh karena itu, $\tau([f_{ij}]) = [\alpha_{ij}] = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}]$ *well-defined*. Selanjutnya, akan dibuktikan $\tau([f_{ij}] + [g_{ij}]) = \tau([f_{ij}]) + \tau([g_{ij}])$ dan $\tau([f_{ij}][g_{ij}]) = \tau([f_{ij}])\tau([g_{ij}])$ untuk setiap $[f_{ij}], [g_{ij}] \in M_n(R_1[S_1])$.

(i) Dari definisi pemetaan τ dan operasi penjumlahan matriks pada (7), didapat $\tau([f_{ij}] + [g_{ij}]) = \tau([f_{ij} + g_{ij}]) = [\mu \circ (f_{ij} + g_{ij}) \circ \delta^{-1}]$. Berdasarkan Lema 1, $[\mu \circ (f_{ij} + g_{ij}) \circ \delta^{-1}] = [(\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}) + (\mu \circ g_{ij} \circ \delta^{-1})] = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}] + [\mu \circ g_{ij} \circ \delta^{-1}] = \tau([f_{ij}]) + \tau([g_{ij}])$. Dengan kata lain terbukti $\tau([f_{ij}] + [g_{ij}]) = \tau([f_{ij}]) + \tau([g_{ij}])$.

(ii) Berdasarkan definisi pemetaan τ dan operasi perkalian matriks pada (8), didapat $\tau([f_{ij}][g_{ij}]) = \tau([\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj}]) = [\mu \circ (\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj}) \circ \delta^{-1}]$.
Berdasarkan Lema 1, $[\mu \circ (\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj}) \circ \delta^{-1}] = [\sum_{k=1}^{n} \mu \circ (f_{ik}g_{kj}) \circ \delta^{-1}] = [\sum_{k=1}^{n} (\mu \circ f_{ik} \circ \delta^{-1})(\mu \circ g_{kj} \circ \delta^{-1})] = [\mu \circ f_{ik} \circ \delta^{-1}][\mu \circ g_{ij} \circ \delta^{-1}] = \tau([f_{ij}])\tau([g_{ij}])$.
Dengan kata lain terbukti $\tau([f_{ij}][g_{ij}]) = \tau([f_{ij}])\tau([g_{ij}])$.

Dari (i) dan (ii), terbukti pemetaan τ merupakan homomorfisma ring. ■

Syarat cukup pemetaan $\tau: M_n(R_1[S_1]) \to M_n(R_2[S_2])$ merupakan monomorfisma, diberikan pada proposisi berikut.

Proposisi 4 *Diberikan ring matriks atas ring semigrup $M_n(R_1[S_1])$, $M_n(R_2[S_2])$. Jika $\delta: S_1 \to S_2$ isomorfisma dan $\mu: R_1 \to R_2$ monomorfisma, maka pemetaan $\tau: M_n(R_1[S_1]) \to M_n(R_2[S_2])$ dengan $\tau([f_{ij}]) = [\alpha_{ij}] = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}]$ untuk setiap $[f_{ij}] \in M_n(R_1[S_1])$, merupakan monomorfisma.*

Bukti Akan ditunjukkan τ injektif. Jika $\tau([f_{ij}]) = \tau([g_{ij}])$, maka $[\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}] = [\mu \circ g_{ij} \circ \delta^{-1}]$. Berdasarkan definisi kesamaan dua matriks, diperoleh $\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1} = \mu \circ g_{ij} \circ \delta^{-1}$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Dengan kata lain, untuk setiap $t \in S_2$ dan $i, j = 1, 2, \cdots, n$ berlaku $\mu\left(f_{ij}(\delta^{-1}(t))\right) = \mu\left(g_{ij}(\delta^{-1}(t))\right)$. Karena diketahui μ monomorfisma, diperoleh $f_{ij}(\delta^{-1}(t)) = g_{ij}(\delta^{-1}(t))$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Karena δ isomorfisma, berlaku $f_{ij}(s) = g_{ij}(s)$ untuk setiap $s \in S_1$ dan $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Dengan kata lain, $f_{ij} = g_{ij}$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$ yang berakibat $[f_{ij}] = [g_{ij}]$. Jadi terbukti jika $\tau([f_{ij}]) = \tau([g_{ij}])$, maka $[f_{ij}] = [g_{ij}]$. Dengan kata lain τ injektif. Berdasarkan Teorema 3, τ merupakan homomorfisma ring. Jadi, terbukti τ merupakan monomorfisma. ■

4 Simpulan

Dari sebarang ring R_1 dan R_2 serta semigrup S_1 dan S_2, dapat dikonstruksi ring semigrup $R_1[S_1]$ dan $R_2[S_2]$ serta ring matriks $M_n(R_1[S_1])$ dan $M_n(R_2[S_2])$. Jika diberikan isomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$, maka terdapat $\alpha \in R_2[S_2]$ dengan $\alpha = \mu \circ f \circ \delta^{-1}$, untuk setiap $f \in R_1[S_1]$. Hal ini yang mengakibatkan dapat didefinisikannya pemetaan $\tau: M_n(R_1[S_1]) \to M_n(R_2[S_2])$ dengan $\tau([f_{ij}]) = [\alpha_{ij}] = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}]$, untuk setiap $[f_{ij}] \in M_n(R_1[S_1])$. Selanjutnya, telah ditunjukkan pemetaan τ merupakan homomorfisma ring. Selain itu, τ merupakan monomorfisma jika δ isomorfisma dan μ monomorfisma.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada para *reviewer* atas saran yang diberikan untuk kesempurnaan artikel ini. Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Lampung atas dukungan dan pendanaan penelitian ini berdasarkan Kontrak Penelitian No: 661/UN 26.21/PN/2022.

6 Daftar Pustaka

[1] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version, 9th Edition*. New Jersey, 2005.

[2] W. C. Brown, *Matrices Over Commutative Rings*. New York: Marcel Dekker Inc., 1993.

[3] A. Faisol and Fitriani, “Idempotent Matrix over Skew Generalized Power Series Rings,” *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 5, no. 1, pp. 9–15, 2022.

[4] S. Rugayah, A. Faisol, and Fitriani, “Matriks atas Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring,” *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 15, no. 1, pp. 157–166, 2021.

[5] A. Faisol and F. Fitriani, “Matriks Bersih Kuat atas Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring,” *J. Mat. UNAND*, vol. 10, no. 3, pp. 385 – 393, 2021.

[6] T. Petik, “On Characterization of Tripotent Matrices in Triangular Matrix Rings,” *Turkish J. Math.*, vol. 45, no. 5, pp. 1914–1926, 2021.

[7] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, Third Edit. John Wiley and Sons, Inc., 2004.

[8] T. W. Hungerford, *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1974.

[9] R. Gilmer, *Commutative Semigroup Rings*. Chicago and London: The University of Chicago, 1984.

[10] A. Oneto and T. G., “On semigroup rings with decreasing Hilbert function,” *J. Algebr.*, vol. 489, pp. 373–398, 2017.

[11] Y. Ji, “The Strong Nil-Cleanness of Semigroup Rings,” *Open Math.*, vol. 18, no. 1, pp. 1491–1500, 2020.

[12] V. Barucci, R. Fröberg, and M. Şahin, “On Free Resolutions of Some Semigroup Rings,” *J. Pure Appl. Algebr.*, vol. 218, no. 6, pp. 1107–1116, 2014.

[13] A. Kovacs, “Homomorphisms of Matrix Rings into Matrix Rings,” *Pacific J. Math.*, vol. 49, no. 1, pp. 161–170, 1973.

[14] Y. Du and Y. Wang, “Jordan homomorphisms of upper triangular matrix rings over a prime ring,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 458, pp. 197–206, 2014.

[15] A. Faisol and Fitriani, “The Ring Homomorphisms of Matrix Rings over Skew Generalized Power Series Rings,” *CAUCHY J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 7, no. 1, pp. 129–135, 2021.

[16] A. Faisol and Fitriani, “Homomorfisma Modul Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring,” *J. Mat. Integr.*, vol. 17, no. 2, pp. 119–126, 2021.