Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 1, Mei 2022, 75-86
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i1.9987

Pengaruh Inflasi terhadap Strategi Optimal Investasi dan Konsumsi dengan Model Stokastik

Dara Irsalina [1] *, Retno Budiarti [2], I Gusti Putu Purnaba[3]
[1,2,3]Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Institut Pertanian Bogor
e-mail: darairsalina@apps.ipb.ac.id

Diajukan: 10 Agustus 2021, Diperbaiki: 15 September 2021, Diterima: 21 Oktober 2021

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji pengaruh inflasi terhadap strategi optimal pada investasi dan konsumsi dengan nilai suku bunga dimodelkan menggunakan model Cox-Ingersol-Ross (CIR) dan volatilitas harga saham dimodelkan mengikuti volatilitas model Heston. Aturan program dinamik digunakan sebagai metode untuk mendapatkan persamaan Hamilton-Jacobi-Ballman (HJB) pada persamaan fungsi nilai dan memilih *power utility* sebagai fungsi utilitas. Solusi eksplisit dari investasi dan konsumsi optimal didapatkan dengan menggunakan teknik pemisah dan pemisalan variabel. Nilai-nilai parameter dari model didekati dengan menggunakan metode Euler-Maruyama dan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Asumsikan portfolio investor terdiri atas sebuah aset berisiko dan sebuah aset bebas risiko. Data historis bulanan harga saham PT Telekomunikasi Indonesia (TLK) digunakan sebagai aset berisiko dan data historis bulanan BI 7-Day (Reverse) Repo Rate (BI7DRR) sebagai suku bunga aset bebas risiko, diperoleh hasil bahwa jumlah investasi pada saham berbanding lurus dengan imbal hasil saham dan inflasi tidak mempengaruhi jumlah investasi pada saham. Sedangkan konsumsi optimal berbanding lurus dengan jumlah kekayaan yang dimiliki namun berlaku sebaliknya terhadap inflasi ketika inflasi meningkat daya konsumsi investor menurun.

Kata Kunci: program dinamik, kontrol optimal, investasi-konsumsi, CIR, Heston

Abstract

The aim of this study is to investigate an optimal investment-consumption strategy under inflation rate with interest rate is described by Cox-Ingersol-Ross (CIR) model and volatility of the stock price is defined by Heston's volatility model. A dynamic programming principle is used to obtain a Hamilton Jacobi Bellman (HJB) equation for the value function and choose a power utility function as utility function. The explicit solution of optimal investment and consumption are acquired with using separate variable and approach variable technique. The parameter's values are approached by Euler-Maruyama method and Ordinary Least Square (OLS) method. Assumed that the portfolio of the investor contains a risk-free asset and a risk asset. Monthly historical data of TLK stock is used as risk asset and monthly historical data of BI 7-Day (Reverse) Repo Rate (BI7DRR) is used as risk-free asset, we obtain that the proportion of investment in stock is directly proportional to return of stock and the inflation rate does not have an impact on proportion investment in the stock. Meanwhile the optimal consumption of wealth is directly proportional to investor's wealth and inversely proportional with inflation rate, which is the investor should consume less money of his wealth when the inflation rate increases.

Keywords: dynamic programming, optimal control, investment-consumption, CIR, Heston

1 Pendahuluan

Strategi mengoptimalkan investasi dan konsumsi merupakan salah satu topik yang banyak dikaji saat ini. Konsep ini pertama kali dikemukakan oleh Merton. Merton [1,2] mempelajari strategi mengoptimalkan portfolio dan konsumsi dengan aturan program dinamik. Namun pada penelitiannya, Merton mengasumsikan suku bunga dan volatilitas bernilai konstan. Penelitian Merton tersebut memberikan inspirasi terhadap peneliti lainnya untuk mempelajari dan mengembangkan permasalahan tersebut, seperti Chang dan Rong [3] memaksimumkan utilitas investasi dan konsumsi pada seorang investor dengan menggunakan teori kontrol optimal. Namun pada penelitiannya, Chang dan Rong mengasumsikan suku bunga dan volatilitas harga aset dimodelkan menggunakan model diferensial stokastik.

Terdapat beberapa literatur yang menujukkan bahwa suku bunga dapat dimodelkan menggunakan model diferensial stokastik. Salah satunya yaitu model Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Model CIR pertama kali diperkenalkan oleh Cox, Ingersoll, dan Ross pada 1985 untuk mempelajari struktur dari suku bunga dan bertujuan untuk mendeskripsikan evolusi dari suku bunga sebagai proses difusi [4]. Model CIR memperbaiki model Vasicek, untuk menghindari suku bunga bernilai negatif.

Di lain pihak, volatilitas harga aset dapat dimodelkan mengikuti volatilitas model stokastik Heston. Model Heston pertama kali diperkenalkan oleh Heston pada tahun 1993. Heston dapat menunjukkan bahwa logaritma imbal hasil aset berdistribusi normal dan dapat menunjukkan *mean - reverting property* dari volatilitas [5].

Dewasa ini, fenomena inflasi menjadi salah satu perhatian utama berbagai negara, baik negara maju maupun negara berkembang. Ketika harga secara terus menerus naik, inflasi dapat menyebabkan distorsi dalam perilaku investasi dan sangat mempengaruhi kehidupan sehari-hari [6]. Secara definisi, inflasi merupakan suatu kecenderungan meningkatnya harga-harga barang dan jasa secara umum dan terus menerus [7]. Inflasi dapat mengakibatkan nilai dari suatu mata uang mengalami penurunan sehingga menyebabkan kenaikan harga dan daya beli masyarakat menurun.

Terdapat beberapa penelitian yang memperlajari strategi mengoptimalkan investasi dan konsumsi ketika diberikan faktor inflasi, seperti Wu [6] mempelajari masalah optimasi investasi dan konsumsi terhadap inflasi menggunakan model Markovian Regime, Chou *et al.* [8] mempelajari strategi optimasi portofolio dan konsumsi dengan atau tanpa efek inflasi, Mamun [9] mempelajari pengaruh laju inflasi terhadap keputusan alokasi aset investor di Amerika, dan Zhang dan Zheng [10] mengoptimalkan investasi dan reasuransi dengan tingkat suku bunga dan laju inflasi dimodelkan menggunakan model stokastik.

Penelitian ini mengikuti penelitian Chang dan Rong [3] yaitu memaksimumkan utilitas investasi dan konsumsi dengan menggunakan model CIR untuk menggambarkan suku bunga pada aset, dan volatilitas model Heston untuk memodelkan volatilitas harga aset. Namun, pada penelitian ini akan dianalisis dampak dari solusi yang dihasilkan ketika diberikan efek inflasi sebagai risiko finansial. Tujuan penelitian ini adalah mengkaji model CIR dan volatilitas model Heston, mengkaji pengaruh inflasi terhadap strategi optimal dalam permasalahan investasi dan konsumsi berdasarkan suku bunga yang dimodelkan menggunakan model CIR serta volatilitas harga aset yang dimodelkan mengikuti volatilitas pada model Heston, dan menerapkan model yang digunakan untuk data aset keuangan di Indonesia.

2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, aturan program dinamik digunakan untuk mendapatkan persamaan Hamilton Jacobi Bellman (HJB) pada fungsi nilai dan memilih fungsi *power utility*. Solusi eksplisit dari investasi dan konsumsi optimal didapatkan dengan menggunakan teknik pemisalan dan pemisahan variabel. Nilai-nilai parameter dari model didekati dengan menggunakan metode Euler-Maruyama dan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Nilai-nilai parameter tersebut digunakan sebagai ilustrasi finansial dari investasi dan konsumsi optimal yang diperoleh.

Asumsikan portofolio investor terdiri atas sebuah aset berisiko dan aset bebas risiko, serta tidak adanya biaya transaksi dan semua aset diperdagangkan secara kontinu terhadap waktu, $\left(W_0(t), W_1(t), W_2(t)\right)$ merupakan gerak Brown yang diasumsikan saling bebas pada *a given filtered complete probability space* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$, T merupakan konstanta positif yang merepresentasikan waktu berhingga investasi.

2.1 Pasar finansial

Asumsikan pasar finansial dibentuk dalam dua aset yaitu aset bebas risiko dan aset berisiko. Harga aset bebas risiko $(B(t))$ diformulasikan sebagai berikut:

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r(t)dt. \tag{1}$$

$r(t)$ merupakan nilai suku bunga aset bebas risiko pada waktu t yang dimodelkan menggunakan model CIR:

$$dr(t) = \kappa_r\big(\theta - r(t)\big)dt + \eta_1 \sqrt{r(t)}\, dW_0(t). \tag{2}$$

W_0 merupakan gerak Brown 1-dimensi, θ, κ_r dan η_1 merupakan konstanta positif, η_1 merupakan volatilitas dari nilai suku bunga aset bebas risiko.

Harga aset berisiko dibentuk menggunakan model diferensial stokastik sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) + \lambda\sigma(t))dt + \gamma\sqrt{\sigma(t)}\,dW_1(t). \quad (3)$$

$(r(t) + \lambda\sigma(t))$ merupakan imbal hasil aset dan γ merupakan konstanta positif, dan $\sigma(t)$ merupakan volatilitas dari harga aset berisiko yang dimodelkan mengikuti volatilitas pada model Heston:

$$d\sigma(t) = \kappa_\sigma\big(\omega - \sigma(t)\big)dt + \eta_2\sqrt{\sigma(t)}\,dW_1(t). \quad (4)$$

W_1 merupakan gerak Brown 1-dimensi, κ_σ, ω dan η_2 merupakan konstanta positif, η_2 merupakan volatilitas dari volatilitas harga aset berisiko.

2.2 Tingkat Harga Nominal

Asumsikan $I(t)$ merupakan tingkat harga nominal per unit dari konsumsi pada waktu t, maka perubahan $I(t)$ dapat dibentuk dalam persamaan diferensial stokastik berikut:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_2(t). \quad (5)$$

μ_1 diasumsikan sebagai laju inflasi, σ_1 merupakan volatilitas tingkat harga nominal, dan W_2 merupakan gerak Brown 1-dimensi.

2.3. Evolusi Nilai Kekayaan

Misalkan kekayaan awal investor dinotasikan dengan $X_0 > 0$ dan kekayaan investor yang digunakan untuk berinvestasi pada waktu t dinotasikan dengan $X(t), t \in [0, T]$. Variabel $\pi(t)$ merupakan proporsi investasi di aset berisiko ($S(t)$) pada waktu t. $\big(1 - \pi(t)\big)$ merupakan proporsi dari nilai kekayaan yang dimiliki untuk diinvestasikan pada aset bebas risiko. Sehingga evolusi kekayaan dapat disusun dengan persamaan diferensial mengikuti proses stokastik berikut:

$$d\bar{X}(t) = \bar{X}(t)\left(\big(1 - \pi(t)\big)\frac{dB(t)}{B(t)} + \pi(t)\frac{dS(t)}{S(t)}\right) - C(t)I(t)dt. \quad (6)$$

Substitusi Persamaan (1) dan (3) ke (6), maka didapatkan:

$$d\bar{X}(t) = \bar{X}(t)\left[\big(r(t) + \pi(t)\lambda\sigma(t)\big)dt + \pi(t)\gamma\sqrt{\sigma(t)}dW_1(t)\right] - C(t)I(t)dt.$$

Faktor inflasi memberikan dampak terhadap nilai kekayaan. Dengan menggunakan formula Ito, evolusi nilai kekayaan riil setelah dikenakan dampak inflasi dapat dimodelkan dengan model diferensial stokastik sebagai berikut:

$$d\left(X(t) = \frac{\bar{X}(t)}{I(t)}\right) = \Big(X(t)\big[\big(r(t) + \pi(t)\lambda\sigma(t)\big) + \sigma_1^2(t) - \mu_1(t)\big] - C(t)\Big)dt +$$
$$X(t)\pi(t)\gamma\sqrt{\sigma(t)}dW_1(t) - X(t)\sigma_1 dW_2(t).$$

2.4 Kriteria Optimisasi

Definisi 1[3] Strategi Terkenan (*Admissible Strategy*)

Strategi investasi dan konsumsi optimal dapat digunakan jika mengikuti kondisi berikut:

i. $\{(\pi(t), C(t))\}$ merupakan himpunan yang terukur secara progresif.

ii. $\pi_t \geq 0$ dan $C(t) \geq 0$ untuk semua $t \geq 0$.

iii. Untuk $\forall(\pi(t), C(t))$, perubahan persamaan kekayaan $X(t)$ yang dimodelkan dengan persamaan diferensial stokastik mempunyai solusi khusus.

Asumsikan $\Gamma = \{ (\pi(t), C(t)) : t \in [0, T]\}$ merupakan himpunan yang memenuhi *ad-missible strategy*. Investor ingin memaksimumkan *expected discounted utility* dari konsumsi pada waktu $[0, T]$ dan kekayaan pada waktu T. Fungsi tujuan untuk memaksimumkan utilitas dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\underset{(\pi(t),C(t))\in\Gamma}{Maximize}\ E\left[\alpha \int_0^T e^{-\beta t}\, U_1(C(t))\, dt + (1-\alpha)e^{-\beta T} U_2(X(T))\right]. \quad (7)$$

$U_1(C(t))$ dan $U_2(X(T))$ merupakan fungsi utilitas terhadap konsumsi dan nilai kekayaan riil ketika dikenakan faktor inflasi, parameter β merupakan *subjective discount rate,* dan α merupakan sensitivitas utilitas. Ketika $\alpha = 0$, nilai harapan utilitas hanya bergantung pada nilai kekayaan.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Diskripsi Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data historis suku *bunga BI 7-Day (Reverse) Repo Rate* (BI7DRR) Mei 2011 hingga Mei 2018 bersumber dari *www.bi.go.id* diambil pada Senin 22 Maret 2021, historis data harga saham bulanan PT Telekomunikasi Indonesia (TLK) periode Mei 2011 hingga Mei 2018 dikutip dari *www.yahoofinance.com* pada Senin 22 Maret 2021, dan historis data volatilitas harga saham bulanan PT Telekomunikasi Indonesia (TLK) periode Mei 2011 hingga Mei 2018 diambil dari *www.alphaquery.com* pada Senin 22 Maret 2021.

3.2 Portofolio Optimal

Asumsikan persamaan fungsi nilai didefinisikan sebagai berikut:

$$G(t, r, \sigma, x) = \underset{(\pi(t),C(t))\in\Gamma}{Maximize}\ E\left[\begin{array}{c}\alpha \int_0^T e^{-\beta t}\, U_1(C(t))\, dt + (1-\alpha)e^{-\beta T} U_2(X(T))| \\ X(t) = x,\ r(t) = r, \sigma(t) = \sigma\end{array}\right], \quad (8)$$

dengan kondisi batas $G(T, r, \sigma, x) = (1-\alpha)e^{-\beta T} U_2(X(T))$. Menggunakan aturan program dinamik didapatkan persamaan Hamilton Jacobi Bellman (HJB) dari Persamaan (8) sebagai berikut:

$$G(t,x,r,\sigma) = \sup_{(\pi(t),c(t))} \Big\{G_t + \frac{1}{2}(x^2\pi^2\gamma^2\sigma + x^2\sigma_1^2)\, G_{xx} + \frac{1}{2}\eta_1^2 r G_{rr} + \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma G_{\sigma\sigma} + x\pi\gamma\eta_2\sigma\, G_{x\sigma} + (x(r+\pi\lambda\sigma+\sigma_1^2-\mu_1)-C)G_x + \kappa_r(\theta-r)G_r + \kappa_\sigma(\omega-\sigma)G_\sigma + \alpha e^{-\beta t}U_1(C(t))\Big\} = 0. \tag{9}$$

$G(T,x,r,\sigma) = (1-\alpha)e^{-\beta T}U_2(x)$, dan $G_t, G_x, G_r, G_\sigma, G_{xx}, G_{rr}, G_{\sigma\sigma}, G_{x\sigma}$ merupakan diferensial parsial orde 1 dan orde 2 terhadap t. Kondisi optimal untuk konsumsi dan investasi adalah sebagai berikut:

$$\pi^*(t) = -\frac{\eta_2}{\gamma}\frac{G_{x\sigma}}{xG_{xx}} - \frac{\lambda}{\gamma^2}\frac{G_x}{xG_{xx}}. \tag{10}$$

$$U_1'(C^*) = \frac{G_x}{\alpha\, e^{-\beta t}}. \tag{11}$$

Subsitusi Persamaan (10) dan (11) ke Persamaan (9) didapatkan persamaan HJB berikut:

$$G_t + \frac{1}{2}x^2\sigma_1^2\, G_{xx} - \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma\frac{G_{x\sigma}^2}{G_{xx}} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2\sigma}{\gamma^2}\frac{G_x^2}{G_{xx}} + \frac{1}{2}\eta_1^2 r G_{rr} + \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma G_{\sigma\sigma} - \frac{\lambda\eta_2\sigma}{\gamma}\frac{G_xG_{x\sigma}}{G_{xx}} + (x(r+\sigma_1^2-\mu_1)-C^*)G_x + \kappa_r(\theta-r)G_r + \kappa_\sigma(\omega-\sigma)G_\sigma + \alpha e^{-\beta t}U_1\big(C^*(t)\big) = 0. \tag{12}$$

3.3 *Power Utility*

Persamaan (12) merupakan persamaan diferensial parsial yang sukar untuk diselesaikan secara umum. Untuk itu, diperlukan persamaan *power utility*, untuk menyelesaikan persamaan tersebut secara eksplisit. Misalkan:

$$U_1(x) = U_2(x) = \frac{x^\epsilon}{\epsilon}, \epsilon < 1, \epsilon \neq 0. \tag{13}$$

ϵ merupakan *risk aversion factor.*

Asumsikan solusi dari Persamaan (12) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$G(t,x,r,\sigma) = e^{-\beta t}f(t,r,\sigma)\frac{x^\epsilon}{\epsilon}. \tag{14}$$

Subsitusi turunan pertama Persamaan (13) ke Persamaan (11), didapatkan nilai konsumsi optimal pada waktu t adalah sebagai berikut:

$$C^*(t) = \alpha^{-\frac{1}{\epsilon-1}}f^{\frac{1}{\epsilon-1}}x. \tag{15}$$

Subsitusi turunan Persamaan (14) dan Persamaan (15) ke Persamaan (12) didapatkan:

$$-\beta f + f_t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 f\epsilon(\epsilon-1) - \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma\frac{\epsilon f_\sigma{}^2}{f(\epsilon-1)} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2\sigma}{\gamma^2}\frac{\epsilon f}{(\epsilon-1)} + \frac{1}{2}\eta_1^2 r f_{rr} + \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma f_{\sigma\sigma} - \frac{\lambda\eta_2\sigma}{\gamma}\frac{\epsilon f_\sigma}{(\epsilon-1)} + (r+\sigma_1^2-\mu_1)f\epsilon + \kappa_r(\theta-r)f_r + \kappa_\sigma(\omega-\sigma)f_\sigma + \alpha^{-\frac{1}{\epsilon-1}}f^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}(1-\epsilon) = 0. \tag{16}$$

Misalkan solusi Persamaan (16) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$f(t,r,\sigma) = g(t,r,\sigma)^{1-\epsilon}. \tag{17}$$

Subsitusi Persamaan (17) ke Persamaan (16), didapatkan:

$$g_t + \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2\epsilon(1-\epsilon) + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2\sigma}{\gamma^2}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} - \beta + (r + \sigma_1^2 - \mu_1)\epsilon\right)\frac{g}{(1-\epsilon)} - \frac{1}{2}\eta_1^2 r\epsilon\frac{g_r^2}{g} + \frac{1}{2}\eta_1^2 r g_{rr} + \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma g_{\sigma\sigma} + \frac{\lambda\eta_2\sigma}{\gamma}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)}\, g_\sigma + \kappa_r(\theta - r)g_r + \kappa_\sigma(\omega - \sigma)g_\sigma + \alpha^{-\frac{1}{\epsilon-1}} = 0. \tag{18}$$

Asumsikan solusi Persamaan (18) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$g(t,r,\sigma) = \alpha^{\frac{1}{1-\epsilon}}\int_t^T \hat{g}(u,r,\sigma)du + (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\epsilon}}\hat{g}(t,r,\sigma). \tag{19}$$

Mengikuti [3], Persamaan (18) dapat direduksi sebagai berikut:

$$\left(-\frac{1}{2}\sigma_1^2\epsilon(1-\epsilon) + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2\sigma}{\gamma^2}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} - \beta + (r + \sigma_1^2 - \mu_1)\epsilon\right)\frac{\hat{g}}{(1-\epsilon)} + \hat{g}_t - \frac{1}{2}\eta_1^2 r\epsilon\frac{\hat{g}_r^2}{\hat{g}} + \frac{1}{2}\eta_1^2 r\hat{g}_{rr} + \frac{1}{2}\eta_2^2\sigma\hat{g}_{\sigma\sigma} + \frac{\lambda\eta_2\sigma}{\gamma}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)}\,\hat{g}\hat{}_\sigma + \kappa_r(\theta - r)\hat{g}_r + \kappa_\sigma(\omega-\sigma)\hat{g}_\sigma = 0, \quad \hat{g}(T,r,\sigma) = 1. \tag{20}$$

Asumsikan solusi Persamaan (20) dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\hat{g}(t,r,\sigma) = \exp\{\psi(t)\sigma + h(t)r + \phi(t)\}, \tag{21}$$

dengan $\psi(T) = h(T) = \phi(T) = 0$, substitusi Persamaan (21) ke Persamaan (20), didapatkan:

$$r\left\{\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} + h'(t) + \frac{1}{2}(1-\epsilon)\eta_1^2\big(h(t)\big)^2 - \kappa_r h(t)\right\} + \sigma\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\gamma^2}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)^2} + \psi'(t) + \frac{1}{2}\eta_2^2\big(\psi(t)\big)^2 + \left(\frac{\lambda\eta_2}{\gamma}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} - \kappa_\sigma\right)\psi(t)\right\} - \frac{1}{2}\sigma_1^2\epsilon - \frac{\beta}{(1-\epsilon)} + (\sigma_1^2 - \mu_1)\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} + \phi'(t) + \kappa_r\theta h(t) + \kappa_\sigma\omega\psi(t) = 0 \tag{22}$$

Persamaan (22) dapat didekomposisi menjadi tiga persamaan berikut:

$$r\left\{\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} + h'(t) + \frac{1}{2}(1-\epsilon)\eta_1^2\big(h(t)\big)^2 - \kappa_r h(t)\right\} = 0. \tag{23}$$

$$\sigma\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\gamma^2}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)^2} + \psi'(t) + \frac{1}{2}\eta_2^2\big(\psi(t)\big)^2 + \left(\frac{\lambda\eta_2}{\gamma}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} - \kappa_\sigma\right)\psi(t)\right\} = 0. \tag{24}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^2\epsilon - \frac{\beta}{(1-\epsilon)} + (\sigma_1^2 - \mu_1)\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} + \phi'(t) + \kappa_r\theta h(t) + \kappa_\sigma\omega\psi(t) = 0. \tag{25}$$

dari Persamaan (23), Karena $r \neq 0$, maka $\left(\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} + h'(t) + \frac{1}{2}(1-\epsilon)\eta_1^2\big(h(t)\big)^2 - \kappa_r h(t)\right) = 0$

sehingga didapatkan:

$$h'(t) = -\frac{1}{2}(1-\epsilon)\eta_1^2\left(\big(h(t)\big)^2 - \frac{2\kappa_r}{(1-\epsilon)\eta_1^2}h(t) + \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)^2\eta_1^2}\right). \tag{26}$$

Jika Δ_r merupakan diskriminan Persamaan (26) yang bernilai positif, maka

$\Delta_r = \frac{4}{(1-\epsilon)^2\eta_1^4}(\kappa_r^2 - \epsilon\eta_1^2) > 0$, sehingga:

$$\epsilon < \frac{\kappa_r^2}{\eta_1^2}. \tag{27}$$

Berdasarkan kondisi (27), integralkan Persamaan (26) terhadap t, didapatkan:

$$h(t) = \frac{a_1 a_2\left(1-\exp\left\{-(a_1-a_2)\left(\frac{1}{2}\eta_1^2(1-\epsilon)(T-t)\right)\right\}\right)}{a_1-a_2\exp\left\{-(a_1-a_1)\left(\frac{1}{2}\eta_1^2(1-\epsilon)(T-t)\right)\right\}}, \tag{28}$$

dengan

$$a_{1,2} = \frac{\kappa_r}{\eta_1^2(1-\epsilon)} \pm \frac{\sqrt{(\kappa_r)^2-2\eta_1^2\epsilon}}{\eta_1^2(1-\epsilon)}.$$

Lakukan hal yang sama untuk mendapatkan solusi dari $\psi(t)$ dari Persamaan (24), didapatkan:

$$\psi(t) = \frac{a_3 a_4\left(1-\exp\left\{-(a_3-a_4)\frac{1}{2}\eta_2^2(T-t)\right\}\right)}{a_3-a_4\exp\left\{-(a_3-a_4)\frac{1}{2}\eta_2^2(T-t)\right\}}, \tag{29}$$

dengan kondisi

$$\epsilon < \frac{\kappa_\sigma^2}{\left(\kappa_\sigma+\frac{\lambda\eta_2}{\gamma}\right)^2}, \tag{30}$$

dan

$$a_{3,4} = \frac{1}{\eta_2^2}\left(\kappa_\sigma + \frac{\lambda\eta_2}{\gamma}\frac{\epsilon}{(\epsilon-1)}\right) \pm \frac{1}{\eta_2^2}\sqrt{\left(-\frac{\kappa_\sigma^2}{(\epsilon-1)} + \frac{\epsilon}{(\epsilon-1)}\left(\kappa_\sigma + \frac{\lambda\eta_2}{\gamma}\right)^2\right)}.$$

Dari Persamaan (25), didapatkan:

$$\phi(t) = \kappa_r\theta\int_t^T h(t)dt + \kappa_\sigma\omega\int_t^T \psi(t)dt - \frac{1}{(1-\epsilon)}\left(\beta - \sigma_1^2\epsilon\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right) + \mu_1\epsilon\right)(T-t). \tag{31}$$

Berdasarkan Persamaan (28), (29), dan (31), didapatkan g sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g(t,r,\sigma) = {} & \alpha^{\frac{1}{1-\epsilon}}\int_t^T \exp\{\psi(u)\sigma + h(u)r + \phi(u)\}\,du + \\ & (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\epsilon}}\exp\{\psi(t)\sigma + h(t)r + \phi(t)\}, \end{aligned} \tag{32}$$

dengan *risk aversion* (ϵ) memenuhi Persamaan (27) dan (30):

$$\epsilon < min\left\{\frac{\kappa_r^2}{\eta_1^2}, \frac{\kappa_\sigma^2}{\left(\kappa_\sigma+\frac{\lambda\eta_2}{\gamma}\right)^2}\right\},\ \epsilon \neq 0. \tag{33}$$

Sehingga didapatkan proporsi optimal untuk investasi dan konsumsi sebagai berikut:

$$\pi^*(t) = \frac{\eta_2}{\gamma}\frac{g_\sigma}{g} + \frac{\lambda}{\gamma^2}\frac{1}{(1-\epsilon)}, \tag{34}$$

dan

$$C^*(t) = \alpha^{-\frac{1}{\epsilon-1}}g^{-1}X(t). \tag{35}$$

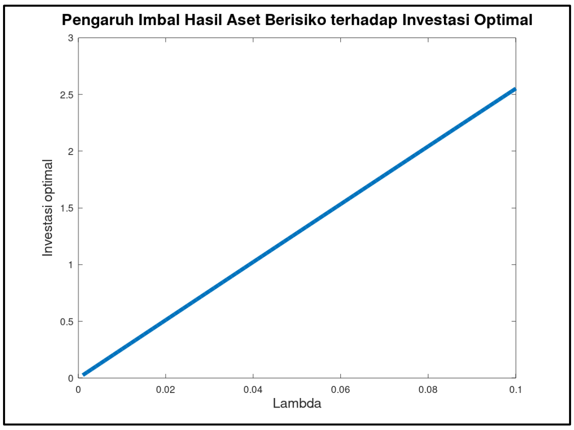
3.4 Ilustrasi Finansial

Pada subbab ini, akan dilakukan ilustrasi finansial terhadap strategi mengoptimalkan investasi dan konsumsi yang diperoleh pada Persamaan (34) dan (35). Asumsikan data historis bulanan suku bunga BI7DRR periode Mei 2011 hingga Mei 2018 digunakan untuk menggambarkan suku bunga aset bebas risiko, dan data historis bulanan volatilitas dan harga saham PT Telekomunikasi Indonesia (TLK) digunakan untuk menggambarkan aset berisko. Nilai parameter pada Persamaan (2), (3), dan (4) didapatkan dengan menggunakan metode Euler Maruyama dan metode *Ordinary Least Square* (OLS).

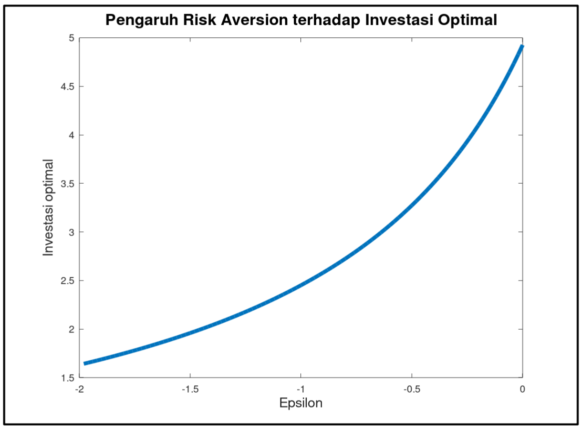
Tabel 1. Nilai parameter persamaan diferensial stokastik (2), (3), dan (4).

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
κ_r	0.0612	λ	0.1212
θ	0.0093	γ	0.7071
η_1	0.0078	κ_σ	8.1476
ω	0.2456	η_2	0.2256

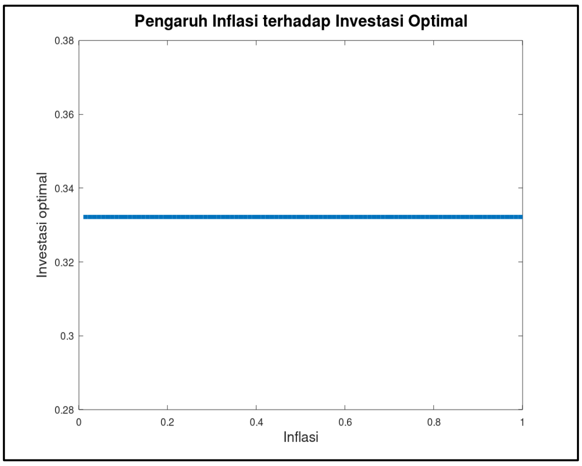
Misalkan $\mu_1 = 0.05, \sigma_1 = 0.1,\ \sigma(0) = 0.2465, r(0) = 0.067, \alpha = 0.4, \beta = 0.083, \epsilon = -1, t = 0,\ T = 7, X(0) = 100$, dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1, ilustrasi numerik investasi dan konsumsi optimal adalah sebagai berikut.



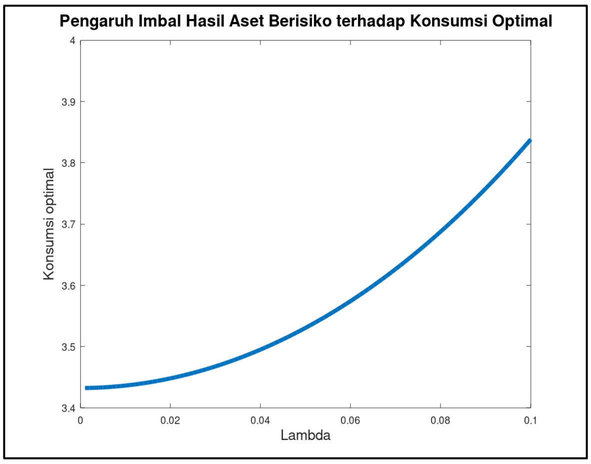
Gambar 1. Pengaruh λ terhadap investasi



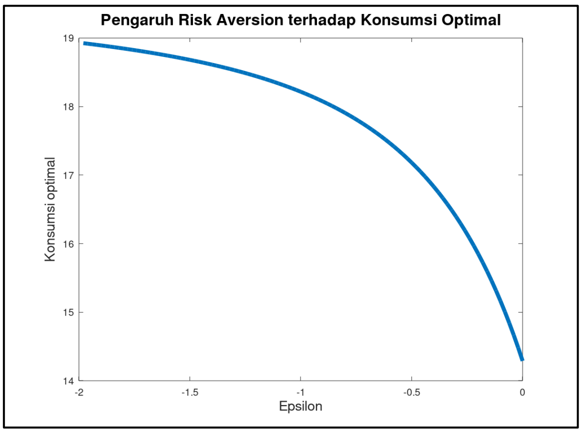
Gambar 2. Pengaruh ϵ terhadap investasi



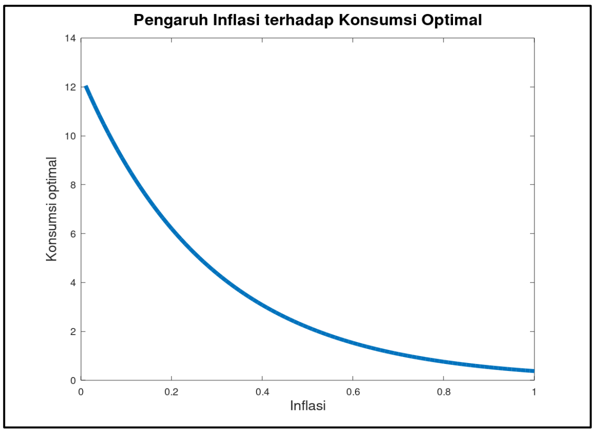
Gambar 3. Pengaruh inflasi terhadap investasi



Gambar 4. Pengaruh λ terhadap konsumsi



Gambar 5. Pengaruh ϵ terhadap konsumsi



Gambar 6. Pengaruh inflasi terhadap konsumsi

a. Gambar 1 merepresentasikan ilustrasi numerik pengaruh λ terhadap investasi optimal pada waktu $t = 0$. Berdasarkan Persamaan (3), λ merupakan konstanta positif pada imbal hasil aset berisiko. Misalkan $0 < \lambda < 0.1$, investasi optimal berbanding lurus terhadap parameter λ. Sehingga ketika imbal hasil aset meningkat, investor dapat berinvestasi lebih banyak pada aset tersebut.

b. Gambar 2 merupakan ilustrasi numerik pengaruh ϵ terhadap investasi optimal. Parameter ϵ merupakan *risk aversion factor* seorang investor. Pada kasus *power utility,* koefisien *risk aversion* bernilai $1 - \epsilon$. Semakin besar nilai ϵ, maka semakin besar risiko yang diambil oleh seorang investor. Berdasarkan Persamaan (33), nilai ϵ memenuhi $\epsilon < 0.963$. Dengan mengasumsikan $-2 \leq \epsilon < 0$, investasi optimal berbanding lurus terhadap ϵ. Semakin besar nilai ϵ maka investor dapat berinvestasi lebih pada aset berisiko.

c. Gambar 3 merupakan ilustrasi numerik pengaruh inflasi terhadap investasi optimal. Berdasarkan grafik tersebut, investasi bernilai konstan terhadap inflasi. Artinya, perubahan inflasi tidak mempengaruhi tingkat keinginan seorang investor untuk berinvestasi pada aset berisiko.

d. Gambar 4 menunjukkan ilustrasi numerik pengaruh λ terhadap konsumsi optimal. λ merupakan konstanta positif imbal hasil aset berisiko. Semakin besar λ maka semakin besar pula kekayaan yang diperoleh oleh investor. Hal ini mengakibatkan investor dapat menambah jumlah konsumsi dari nilai kekayaan yang dimiliki.

e. Gambar 5 merupakan ilustrasi numerik pengaruh ϵ terhadap konsumsi optimal. Berdasarkan ilustrasi tersebut, konsumsi seorang investor berbanding terbalik terhadap ϵ. Semakin besar nilai ϵ maka semakin kecil *risk aversion* seorang investor dan semakin sedikit konsumsi yang dapat dilakukan oleh investor tersebut terhadap nilai kekayaan yang dimiliki.

f. Gambar 6 merupakan ilustrasi numerik strategi konsumsi optimal terhadap inflasi. Dengan memisalkan inflasi bernilai $0 < \mu_1 \leq 1$, konsumsi optimal berbanding terbalik dengan laju inflasi. Artinya ketika inflasi meningkat maka daya konsumsi investor akan menurun.

4 Simpulan

Penelitian ini mempelajari strategi mengoptimalkan investasi dan konsumsi ketika diberikan pengaruh inflasi. Asumsi yang digunakan ialah portofolio investor terdiri atas sebuah aset bebas risiko dan sebuah aset berisiko. Data historis bulanan suku bunga BI7DRR digunakan untuk menggambarkan suku bunga model CIR, data historis harga saham TLK digunakan untuk menggambarkan harga aset berisiko yang dimodelkan menggunakan persamaan diferensial stokastik, dan data historis volatilitas harga saham TLK digunakan untuk menggambarkan volatilitas harga aset berisiko yang dimodelkan mengikuti volatilitas model Heston. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Proporsi investasi pada aset berisiko berbanding lurus dengan besarnya imbal hasil dari aset berisiko. Semakin besar imbal hasil yang didapatkan, semakin besar proporsi dari nilai kekayaan yang dapat diinvestasikan pada aset tersebut. Serta perubahan inflasi tidak mempengaruhi tingkat keinginan seorang investor untuk berinvestasi.
2. Besar konsumsi berbanding lurus dengan nilai kekayaan yang dimiliki. Semakin besar kekayaan, semakin besar pula konsumsi yang dapat digunakan oleh investor. Namun berlaku sebaliknya terhadap inflasi. Ketika inflasi meningkat, daya konsumsi investor menurun.

Pada penelitian ini, solusi eksplisit strategi mengoptimalkan investasi dan konsumsi didapatkan berdasarkan beberapa asumsi, seperti:

a. Tidak adanya korelasi antara gerak Brown pada volatilitas harga aset berisiko dan harga aset berisko.
b. Proses stokastik untuk menggambarkan perubahan harga aset berisiko dan perubahan volatilitas harga aset berisiko menggunakan gerak Brown yang sama.
c. Inflasi bernilai konstan.

Penelitian lanjutan diharapkan mampu melonggarkan asumsi-asumsi di atas dan mempertimbangkan beberapa studi kasus yang lebih umum.

5 Daftar Pustaka

[1] R. C. Merton, "Life Portfolio Selection under Uncertainty: the continuous-time case," *Review of Economics and Statictics*, vol. 51, no. 3, pp. 247-257, 1969.

[2] R. C. Merton, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, vol. 3, pp. 373-413, 1971.

[3] H. Chang dan X.M. Rong, "An Investment and Consumption Problem with CIR Interest Rate and Stochastic Volatility," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, pp. 1-12, 2013, doi: 10.1155/2013/219397.

[4] G. Orlando, R. M. Mininni, and M. Bufalo, "Forecasting Interest Rates Through Vasicek and CIR Models: A Partitioning Approach," *Journal of Forecasting,* vol. 39, no. 4, pp. 569-579, 2019.

[5] D. Lamberton and G. Terenzi, "Variational Formulation of American Option Prices in the Heston Models," *SIAM J. Financial Math*, vol. 10, no. 1, pp. 261-308, 2019.

[6] H. Wu, "Optimal Investment-Consumption Strategy under Inflation in A Markovian Regime-Switching Market," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2016, no. 1, pp. 1-17, 2016, doi: 10.1155/2016/9606497.

[7] Suseno dan S. Astiyah, *Inflasi.* Jakarta: Pusat Pendidikan dan Studi Kebanksentralan Bank Indonesia, 2009.

[8] Y. Y. Chou, N.W. Han, and M. W. Hung, "Optimal Portfolio-Consumption Choice under Stochastic Inflation with Nominal and Indexed Bonds," *Applied Stochastic Models in Business and Industry,* vol. 27, no. 6, pp. 691-706, 2011.

[9] A. Mamun and N. Visaltanachoti, "Inflation Expectation and Asset Allocation in the Presence of an Indexed Bond," *SSRN Electronic Journal*, 2006, doi: 10.2139/ssrn.907147.

[10] X. Zhang and X. Zheng, "Optimal Investment-Reinsurance Policy with Stochastic Interest and Inflation Rates," *Mathematical Problems in Engineering,* vol. 2019, pp. 1-14, 2019, doi: 10.1155/2019/5176172.