



Plagiarism Checker X Originality Report

Similarity Found: 8%

Date: Wednesday, February 26, 2020

Statistics: 342 words Plagiarized / 4259 Total words

Remarks: Low Plagiarism Detected - Your Document needs Optional Improvement.

Radikal Jacobson Ring Sebagai Brace Dua Sisi PuguH Wahyu Prasetyo Kampus 4 UAD, Jalan Lingkar Selatan, Tamanan, Bantul DIY Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Ahmad Dahlan puguH.prasetyo@pmat.uad.ac.id Abstrak Dalam perkembangan ilmu pengetahuan alam, Matematika dan Fisika merupakan ilmu-ilmu dasar yang merupakan fundamental bagi cabang ilmu yang lain.

Dalam perkembangan ilmu Fisika seringkali juga memotivasi adanya temuan-temuan baru dalam ilmu Matematika khususnya aljabar. Di lain pihak, tidak sedikit juga beberapa permasalahan dalam Fisika Teoritis dapat diselesaikan melalui pendekatan aljabar. Dalam kesempatan ini sebagai salah satu bukti nyata hubungan antara Fisika dan Matematika (khususnya Aljabar) diberikan.

Pada tahun 1967 suatu persamaan fundamental dalam Ilmu Fisika ditemukan oleh penerima hadiah Nobel C. N. Yang. Dalam kurun waktu yang sama persamaan ini juga diklaim ditemukan oleh R. J. Baxter. Oleh sebab itu, persamaan ini disebut dengan persamaan Yang-Baxter. Faktanya, persamaan Yang-Baxter ini mempunyai dampak besar dalam perkembangannya, salah satunya adalah dalam Teori Knot.

Akan tetapi solusi analitik dari persamaan ini belum ditemukan hingga saat ini. Hal ini memotivasi para peneliti untuk menemukan solusinya baik secara kualitatif maupun kuantitatif. Beberapa solusi kualitatif telah ditemukan dengan menggunakan struktur aljabar yang baru yang disebut dengan brace.

Suatu grup abelian G dengan operasi perkalian berikut $xy = yx$ disebut brace jika untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku $xy + z = (xy + z) = (x + y)z = x(y + z)$; dan pemetaan $f: G \rightarrow G$ merupakan pemetaan bijektif. Dalam paper ini, deskripsi

tentang brace diberikan sebagai suatu perumuman dari radikal Jacobson dari suatu ring.

Konstruksi brace dua sisi diberikan dalam artikel ini. Kata Kunci: grup Abelian, brace, Persamaan Yang-Baxter, radikal Jacobson Abstract In the development of science, Mathematics and Physics are a basic knowledge which is used as a fundamental aspects for another branch of science.

In the development of Physics, we often found some notions which motivated some new inventions in Mathematics especially in Algebra. In the other hand, many problems in Physics need Mathematics especially algebra as a tool for their solutions. In this chance, we give an existence of the relationship between Physics and Algebra. In 1967, a fundamental equation had been found by Nobel laureate C. N Yang.

In the same period, this fundamental equation was also claimed by R.J Baxter. Hence, this fundamental equation is called **the Yang-Baxter equation**. In fact, the Yang-Baxter equation gives some significant impact for another branch of science, for example, in Knot Theory. Analytically **solution of the Yang-Baxter equation has** not been found until now.

This condition motivates some researchers to find the **solution of the Yang-Baxter equation** via qualitative research or quantitative research. Some qualitative approach of the **solution of the Yang-Baxter equation has** been developed by using a new type of algebra structure, namely, brace. An Abelian group $(A, +)$ with a multiplication $\times$ is called a brace if for all $a, b, c \in A$ satisfies $a + (b \times c) = (a + b) \times c$, $(a \times b) + c = a \times (b + c)$; and the map $\phi: A \rightarrow A$ is a bijective mapping. **In this paper, we** will describe braces as **a generalization of the** Jacobson radical of rings.

Construction of two-sided braces are given. Keywords: Abelian group, brace, Yang-Baxter equation, Jacobson radical

1 Pendahuluan Persamaan Yang-Baxter pertama kali muncul dalam bidang fisika teoritis. Persamaan Yang-Baxter ini ditemukan oleh Fisikawan penerima hadiah Nobel C. N. Yang dalam paper [1].

Selain itu, persamaan Yang-Baxter juga ditemukan dalam [2] dan [3] karya R. J Baxter dengan bidang statistika Mekanik. Persamaan Yang-Baxter ini merupakan salah satu persamaan fundamental dalam Fisika Matematis yang menjadi dasar dalam perkembangan Teori Knot dan perkembangan grup Braid [4]. Ilustrasi Teori Knot dan grup Braid ditunjukkan oleh gambar berikut ini. / Gambar 1. Ilustrasi Teori Knot (Simpul) [5]. / Gambar 2.

Representasi Visual Grup Braid berorder 24 [6]. Contoh grup Braid berorder 24 sendiri adalah grup permutasi 4 yang memiliki anggota $4!=4.3.2.1=24$ dengan operasi komposisi. Selain itu, dampak adanya persamaan Yang-Baxter juga dapat ditemukan dalam bidang Kuantum Mekanik [4]. Hal ini memotivasi para peneliti untuk mencari solusi dari persamaan Yang-Baxter.

Solusi yang diperoleh saat ini terbagi menjadi dua jenis, yaitu solusi dengan pendekatan kualitatif, yaitu dengan menggunakan aksioma-aksioma aljabar dan dengan pendekatan kuantitatif dengan menggunakan solusi numerik [7]. Akan tetapi secara umum, solusi analitiknya masih belum ditemukan hingga saat ini [4]. Beberapa solusi dapat ditemukan dalam [8] dan [9].

Selain itu, Agata Smoktunowicz dalam [10] dan [11] juga memberikan solusi alternatif dari sudut pandang Teori Himpunan. Selanjutnya, solusi dengan pendekatan Teori Himpunan juga diberikan oleh Castelli, et.al dalam papernya [12] dan Matsumoto & Shimizu dalam [13]. Solusi yang diperumum diberikan oleh [14] dengan menggunakan struktur aljabar baru yang disebut dengan brace.

Brace pertama kali dikenalkan pada tahun 2007 oleh Wolfgang Rump dalam papernya [15]. Adapun konsep dan sifat-sifat dasar brace akan dikaji lebih lanjut pada bagian berikutnya. Di lain pihak, solusi numerik dalam bentuk matriks diberikan oleh Smoktunowicz dalam papernya [7].

2 Brace dan Sifat-Sifatnya Definisi brace yang telah disampaikan dalam paper ini di bagian abstrak merupakan definisi brace yang dikenalkan pertama kali oleh Rump [15]. Untuk mempermudah proses penyelidikan diberikan definisi brace kiri, brace kanan, dan brace dua sisi di bawah ini yang ekuivalen dengan definisi brace oleh Rump.

Definisi 1 [11] Suatu himpunan tak kosong ?? disebut brace kiri jika operasi biner (+)

dan $(\cdot)$ sedemikian hingga $(R, +)$ merupakan grup Abelian dan $(R, \cdot)$ merupakan grup yang belum tentu komutatif dan memenuhi sifat $xy + yz = (x + z)y$ untuk setiap $x, y, z \in R$. Didefinisikan dengan cara yang sama, disebut brace kanan jika $xy + yz = y(x + z)$. Himpunan $(R, +, \cdot)$

disebut brace dua sisi jika merupakan brace kiri sekaligus brace kanan. Untuk memperjelas definisi di atas, diberikan teorema di bawah ini untuk menunjukkan eksistensi brace kiri. Teorema 2 [16] Misalkan $R = \mathbb{Z}/(2^n)$ dengan n adalah bilangan prima. Himpunan R membentuk brace kiri yang bukan merupakan brace kanan. Bukti.

Didefinisikan produk atas R , $x \cdot y = x + (-1)^{|x||y|} y$. Kemudian dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa R merupakan brace kiri. Sebaliknya perhatikan bahwa $1 + 1 \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + (-1)^{2 \cdot 1} 1 = 2 + 1 = 3$ dan $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa himpunan R merupakan brace kiri akan tetapi bukan brace kanan.

Contoh 3 [16] Diberikan grup abelian R dan didefinisikan $x \cdot y = xy + yx$ untuk setiap $x, y \in R$. Grup abelian R dengan operasi biner $(\cdot)$ membentuk brace dua sisi. Contoh ini merupakan bentuk brace yang trivial. Eksistensi brace dalam perkembangan Ilmu Aljabar Abstrak khususnya Teori Ring sangatlah penting.

Penelitian tentang brace dilanjutkan oleh para peneliti aljabar dengan mengkaji generalisasinya seperti yang ditunjukkan dalam paper [14], [17] dan [18]. Selain itu, hubungan braces dengan struktur grup juga diberikan oleh [19]. 3 Pengantar Teori Radikal Ring Dalam bagian ini akan diberikan beberapa definisi fundamental seperti ring prima, ring nil, ring nilpotent, dan ring quasi-beraturan sebagai landasan yang akan digunakan dalam menyelidiki sifat-sifat brace yang berkaitan dengan Teori Radikal Ring. Definisi 4 [20] Diketahui ring R .

Suatu elemen $x \in R$ disebut elemen nilpotent jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $x^n = 0$. Ring R disebut ring nil jika setiap elemen dari ring R merupakan elemen nilpotent. Di lain pihak, ring R disebut ring nilpotent jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $x^n = 0$.

Definisi 5 [20] Suatu ideal I dari ring R disebut ideal prima jika $I \neq R$ ideal I dengan sifat $xy \in I$, maka berlaku $x \in I$ atau $y \in I$. Ring R disebut ring prima jika $\{0\}$ merupakan ideal prima. Selanjutnya ring R disebut ring quasi-beraturan jika dengan operasi biner $(\circ)$ atas R yang didefinisikan oleh $x \circ y = xy + yx$ untuk setiap $x, y \in R$ membentuk grup.

Kontribusi hasil penelitian dalam paper ini dalam perkembangan Ilmu Matematika

khususnya Aljabar Abstrak yaitu memberikan konstruksi brace dua sisi dari sudut pandang Teori Radikal Ring. Sebelum diberikan konstruksi brace dua sisi, didefinisikan suatu operasi biner $*$ atas himpunan tak kosong S sebagai berikut $xy = yx - xy$ (1). Berikut merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu himpunan merupakan brace dua sisi. Teorema 6 [20] Himpunan tak kosong $(S, +, \cdot)$

merupakan brace dua sisi jika dan hanya jika $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ untuk setiap $x, y \in S$. Bukti. Jelas dalam [20]. Teorema 6 di atas merupakan salah satu alat yang digunakan untuk menghubungkan antara brace dan radikal Jacobson. Oleh sebab itu pada bagian ini akan diberikan konsep-konsep kelas radikal ring.

Definisi 7 [21] Suatu kelas ring R disebut sebagai kelas ring yang tertutup terhadap homomorfisma ring jika untuk setiap $R/\mathfrak{I}$, maka $R/\mathfrak{I}$ untuk setiap ideal $\mathfrak{I}$ dari R . Untuk memperjelas eksistensi kelas yang tertutup terhadap homomorfisma perhatikan contoh-contoh berikut ini. Contoh 8 Perhatikan kelas ring R yang terdiri dari semua ring nil. Ingat kembali definisi ring nil.

Suatu ring R disebut ring nil jika untuk setiap $x \in R$ terdapat bilangan bulat positif n sehingga $x^n = 0$. Perhatikan bahwa setiap peta dari suatu homomorfisma ring dapat direpresentasi sebagai ring faktor $R/\mathfrak{I}$ dengan $\mathfrak{I}$ ideal $\mathfrak{I}$. Oleh sebab itu, dapat diambil sebarang $\mathfrak{I}$ yang merupakan ideal $\mathfrak{I}$.

Selanjutnya diambil sebarang $x \in R/\mathfrak{I}$, maka x dapat direpresentasikan sebagai $x = y + \mathfrak{I}$ dengan $y \in R$. Karena R merupakan ring nil, maka terdapat bilangan bulat positif n sehingga $y^n = 0$. Selanjutnya, $x^n = (y + \mathfrak{I})^n = y^n + \mathfrak{I} = 0 + \mathfrak{I} = 0$. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa setiap elemen $x \in R/\mathfrak{I}$ merupakan elemen nilpotent.

Dengan kata lain, dapat disimpulkan bahwa ring faktor $R/\mathfrak{I}$ merupakan ring nil. Contoh 9 Perhatikan kelas ring R yang terdiri dari semua ring prima. Pada contoh berikut akan ditunjukkan bahwa kelas semua ring prima R merupakan kelas ring yang tidak tertutup terhadap homomorfisma dengan counter example. Perhatikan ring $R = \{2^k 2^l + 1 \mid \gcd(2^k, 2^l + 1) = 1, k, l \in \mathbb{Z}\}$.

Jelas bahwa ring R merupakan ring yang elemen-elemennya adalah himpunan bilangan-bilangan dengan numerator genap dan denominator ganjil dan ring R merupakan ring prima dengan ideal-idealnya membentuk kondisi rantai menurun (descending chain condition) dapat direpresentasikan sebagai (2^k) dengan $k \in \mathbb{N}$. Akan tetapi ring faktornya bukan merupakan ring prima karena setiap ring faktornya dapat direpresentasikan sebagai $2^k (2^l)$ dengan $k, l \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $2^k 2^l = 2^{k+l}$. Oleh sebab itu, $2^k (2^l)$ merupakan ring nilpotent yang mengakibatkan $2^k (2^l)$

2×2) bukan merupakan ring prima.

Dengan demikian 2×2 (2×2) ????. Jadi 2×2 tidak tertutup terhadap homomorfisma.

Definisi 10 [21] Suatu kelas ring R disebut sebagai kelas ring yang memiliki sifat induktif jika $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ merupakan rantai naik ideal-ideal dari suatu ring R dan jika setiap I_i adalah ideal, maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ juga ideal.

Untuk memperjelas struktur kelas ring yang memiliki sifat induktif dan tidak, perhatikan dua contoh kelas ring sebagai berikut. Contoh 11 Dapat ditunjukkan bahwa kelas ring 0 yang terdiri dari semua ring nil merupakan kelas ring yang memiliki sifat induktif [21].

Contoh 12 Kelas ring 0 yang terdiri dari semua ring nilpotent tidak memiliki sifat induktif. Penjelasan dan pembuktian secara lengkap telah ada dalam [21].

Definisi 13 [21] Suatu kelas ring R disebut tertutup terhadap perluasan jika untuk setiap ring S sehingga terdapat $R \subseteq S$ yang merupakan ideal R dengan sifat R dan ring faktor S/R berada dalam kelas ring R , maka S juga merupakan anggota R . Definisi 14 [21] Suatu kelas ring R disebut kelas radikal ring jika R tertutup terhadap homomorfisma, memiliki sifat induktif dan tertutup terhadap perluasan.

Salah satu contoh kelas radikal adalah kelas semua ring nil R yang ditunjukkan oleh [22] pada Lemma 3. Berdasarkan konstruksinya, ada dua jenis konstruksi, yaitu konstruksi radikal atas dan konstruksi radikal bawah. Dua konstruksi kelas radikal ini dapat ditemukan dalam [22] dan [21].

Dari konstruksi tersebut, terdapat radikal atas yang dibangun oleh kelas khusus antara lain radikal prima P , radikal Levitzki L , dan radikal Jacobson J . Berdasarkan sifatnya, kelas radikal-kelas radikal ini merupakan anggota dari lattice semua kelas radikal supernilpotent. Dalam lattice tersebut, radikal prima P merupakan elemen terkecil. Adapun bagian lattice tersebut diilustrasikan oleh gambar di bawah ini. Gambar 3.

Ilustrasi Hubungan Antara P , L , J dan 0 Kelas radikal prima P termuat dengan tegas dalam kelas radikal Levitzki L , kelas radikal levitzki L termuat secara tegas dalam kelas radikal nil N dan kelas radikal nil termuat secara tegas dalam kelas radikal Jacobson J . Hal dijelaskan karena adanya contoh berikut ini. Contoh 15 Misalkan R merupakan lapangan berhingga dan $f(x)$ merupakan polinomial aljabar atas R dalam $R[x]$ dan R yang tidak berlaku sifat komutatif.

Perhatikan bahwa himpunan $\{f(x) \in R[x] \mid f(0) = 0\}$ merupakan himpunan yang terhingga atau countable maka himpunan ini dapat dinotasikan dengan $\langle f(x) \mid f(0) = 0 \rangle$ yang merupakan polinomial dengan konstanta nol. Dengan mencacah elemen-elemennya, maka elemen $f(x)$ dapat

dinotasikan dengan $\{1, 2, \dots\}$. Selanjutnya, misalkan R merupakan himpunan tak kosong yang merupakan ideal I yang dibangun oleh semua $a \in R$, dengan rincian elemen $a \in I$ dapat diperoleh dari [21].

Lebih lanjut, dalam [21] ditunjukkan bahwa ring faktor R/I merupakan elemen dari kelas radikal nil I tetapi R/I bukan anggota kelas radikal Levizki L . Oleh sebab itu $R/I \not\subseteq L$. Kemudian perhatikan bahwa setiap elemen nilpotent dari suatu ring merupakan elemen quasi-beraturan kiri seperti yang dijelaskan dalam Proposisi 4.4.4 [21].

Akibatnya, setiap ring nil merupakan ring quasi-beraturan. Oleh sebab itu, setiap ring nil termuat dalam kelas radikal Jacobson $J(R)$. Sebaliknya perhatikan ring R yang didefinisikan oleh $a^2 = 2a^2 + 1 \mid \gcd(a, 2) = 1; a \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$. Perhatikan bahwa ring R merupakan salah satu anggota dalam kelas radikal Jacobson seperti yang dijelaskan dalam [21].

Akan tetapi, perhatikan bahwa ring R bukanlah ring nil. Dengan demikian $R \not\subseteq L$. Berdasarkan sifat lattice dari semua kelas radikal supernilpotent dan Contoh 10 yang diberikan di atas dapat disimpulkan bahwa $R \not\subseteq L$. Akan tetapi dapat ditemukan ring-ring tertentu sehingga berlaku $R \not\subseteq L \iff R \not\subseteq J(R) \iff R \not\subseteq L$.

Dengan masing-masing $R, L, J(R)$ dan $R/J(R)$ adalah $R/J(R) = \{I \mid I \text{ ideal ring } R/J(R)\}$, $L/J(R) = \{I \mid I \text{ ideal ring } R/J(R)\}$, $J(R)/J(R) = \{I \mid I \text{ ideal ring } R/J(R)\}$, dan $R/J(R) = \{I \mid I \text{ ideal ring } R/J(R)\}$. Oleh sebab itu, untuk sebarang ring R berlaku sifat berikut ini $R \not\subseteq L \iff R \not\subseteq J(R) \iff R \not\subseteq L$. 4 Hasil dan Pembahasan Pada teorema-teorema berikutnya akan dibahas tentang kaitan antara kelas radikal Jacobson $J(R)$ dengan brace yang telah dikenalkan pada bagian sebelumnya. Sebagai pendahuluan diberikan teorema sebagai berikut yang merupakan alat hubung antara brace dan radikal Jacobson.

Teorema 16 Misalkan R merupakan himpunan tak kosong. Himpunan R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $(+)$ dan $(\cdot)$ merupakan brace dua sisi jika dan hanya jika $(R, +, *)$ merupakan ring Jacobson, dengan kata lain, R dan operasi biner $(*)$ merupakan operasi yang didefinisikan pada Persamaan 1. **Bukti.** Diketahui himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $(+)$ dan $(\cdot)$ merupakan brace dua sisi.

Akan ditunjukkan bahwa $(R, +, *)$ merupakan ring Jacobson yang artinya berdasarkan definisi pembentuk kelas ring Jacobson harus ditunjukkan bahwa $(R, \circ)$ membentuk grup dengan $(\circ)$ merupakan operasi biner atas R yang didefinisikan oleh $a \circ b = a + b + a * b$ untuk setiap $a, b \in R$. Selanjutnya diambil sebarang $a, b \in R$, maka berdasarkan definisi operasi biner $(\circ)$ diperoleh $a \circ b = a + b + a * b$, akibatnya

$$x^*y = x^{\circ}y - xy - yx.$$

Perhatian Persamaan 1, maka operasi biner ($\circ$) sama dengan operasi ($\cdot$) yang telah didefinisikan pada R dengan memandang $(R, +, \cdot)$ sebagai brace. Oleh sebab itu $(R, \circ)$ membentuk grup, sehingga dapat disimpulkan bahwa $(R, +, *)$ merupakan ring Jacobson. Sebaliknya diketahui $(R, +, *)$ merupakan ring Jacobson, akan ditunjukkan bahwa $(R, +, \cdot)$ membentuk brace dua sisi.

Karena $(R, +, *)$ merupakan ring Jacobson, maka jelas bahwa $(R, \cdot)$ membentuk grup. Selanjutnya diambil sebarang $x, y, z \in R$, sehingga diperoleh $x + xy * yz = x + xy * yz + xy * yz$ karena $(R, +, *)$ merupakan ring sehingga berlaku sifat distributif. Dengan demikian berdasarkan Teorema 6 dapat disimpulkan bahwa $(R, +, \cdot)$ membentuk brace dua sisi.

Sebagai akibat dari teorema di atas dan sifat yang dimiliki oleh kelas radikal prima P , kelas radikal Levitzki L , kelas radikal nil N , dan kelas radikal Jacobson J dalam lattice semua kelas radikal supernilpotent, diperoleh akibat sebagai berikut. Teorema 17 Diketahui ring R dan himpunan-himpunan berikut P, L, N, J , $P(P)$ merupakan ideal-ideal ring R yang masing-masing merupakan brace dua sisi.

Bukti. Berdasarkan sifat latris dari semua radikal supernilpotent diperoleh $P \subseteq L \subseteq N \subseteq J$. Oleh sebab itu untuk sebarang ring R berlaku $P \subseteq L \subseteq N \subseteq J \subseteq P(P)$. Dengan masing-masing $P, L, N, J, P(P)$ merupakan ideal-ideal terbesar dari ring R yang masing-masing termuat dalam kelas radikal P, L, N, J . Oleh sebab itu $P, L, N, J, P(P)$ merupakan ring Jacobson.

Jadi berdasarkan Teorema 11, dapat disimpulkan bahwa P, L, N, J , dan $P(P)$ masing-masing membentuk brace dua sisi. Pada teorema berikut akan dijelaskan eksistensi contoh nyata dari suatu brace dua sisi dengan menggunakan Teorema 16. Teorema 18 Didefinisikan himpunan $S = \{2^k 2^l + 1 \mid \gcd(2^k, 2^l + 1) = 1, k, l \in \mathbb{Z}\}$. Struktur $(S, +, \cdot)$ merupakan brace dua sisi, dengan $x \cdot y = xy + yx + (xy \times yx)$ untuk setiap $x, y \in S$. Bukti.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan $S = \{2^k 2^l + 1 \mid \gcd(2^k, 2^l + 1) = 1, k, l \in \mathbb{Z}\}$ cukup ditunjukkan bahwa S merupakan ring Jacobson yang artinya $(S, \circ)$ membentuk grup dengan $x^{\circ}y = xy + yx + (xy \times yx)$ untuk setiap $x, y \in S$. Untuk membuktikan bahwa $(S, \circ)$ merupakan grup, akan dijabarkan dalam empat tahap. Diambil sebarang $x = 2^k 2^l + 1$, $y = 2^m 2^n + 1$, maka x dan y dapat direpresentasikan sebagai $x = 2^k 2^l + 1$, $y = 2^m 2^n + 1$ dengan $\gcd(2^k 2^l + 1, 2^m 2^n + 1) = 1$.

Selanjutnya perhatikan perkalian berikut ini $1 \circ 2 = 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2$
 $2 + 1 + 2 \cdot 1 + 1 \times 2 \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 + 4$
 $1 \cdot 2 (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 + 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 (2$
 $\cdot 1 + 1)(2 \cdot 2 + 1) = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1$
 $2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 2(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1$
 $2) 2(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2) + 1$ Untuk gcd $2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 +$
 $1 \cdot 2, 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 1$ Jelas mengakibatkan $1 \circ 2 = 1$.

Untuk gcd $2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2, 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2$
 $+ 1 \cdot 1$ Misalkan gcd $2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2, 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1$
 $+ 2 \cdot 2 + 1 = 1$ Untuk suatu bilangan bulat positif n , maka $2(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2$
 $\cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2) 2(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2) + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1$
 $+ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2) + 1$ Dengan sifat gcd $2 \cdot 1 \cdot 2 +$
 $1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2, 2(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 2) + 1 = 1$ Hal ini juga
mengakibatkan $1 \circ 2 = 1$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa operasi biner ($\circ$) atas S bersifat tertutup.
Diambil sebarang $1, 2, 3 \in S$, sehingga diperoleh $(1 \circ 2) \circ 3 = 1 + 2 + 3$
 $+ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3$
 $2 \cdot 3 = 1 \circ (2 + 3 + 2 \cdot 3) = 1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (2 \cdot 3)$
 $3) =$ Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa operasi biner ($\circ$) atas S bersifat
asosiatif. Perhatikan bahwa terdapat $0 \in S$ dengan sifat $0 \circ = 0 + 0 = 0$ untuk setiap
 $x \in S$. Jadi 0 memuat elemen identitas.

Diambil sebarang $1 \in S$, akan ditentukan $2 \in S$ dengan sifat $1 \circ 2 = 0$.
Perhatikan $1 \in S$, maka $1 = 2 \cdot 1 + 1$ dengan gcd $2 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 1 = 1$ dan 1
 $1, 1 \in Z$. Selanjutnya, $1 + 2 + 1 \cdot 2 = 0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 + 2 + 2 \cdot 1 + 1$
 $+ 1 \cdot 2 = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2$
 $1 + 1 \cdot 2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2$
 $2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2$
 $1 + 1 \cdot 2$. Berdasarkan empat langkah penjabaran di atas, dapat disimpulkan
bahwa $(S, \circ)$ merupakan grup.

Oleh sebab itu, S merupakan ring Jacobson. Kemudian berdasarkan Teorema 16, ring S
merupakan brace dua sisi. 5 Simpulan Berdasarkan hasil peneliti-peneliti sebelumnya,
brace merupakan salah satu struktur dalam aljabar abstrak yang digunakan sebagai alat
untuk menentukan solusi dari persamaan Yang-Baxter. Oleh sebab itu, mengkaji
sifat-sifat brace sangat penting bagi perkembangan Aljabar Abstrak khususnya Teori
Ring.

Berdasarkan sifatnya, brace dibagi menjadi tiga yaitu brace kiri, brace kanan, dan brace dua sisi. Contoh-contoh brace sendiri ada yang trivial dan ada yang kompleks. Hasil dalam penelitian ini adalah memberikan contoh brace dua sisi yang tidak trivial dari sudut pandang Teori Ring, yaitu dengan menggunakan ring Jacobson. 6 Ucapan Terima Kasih Penulis mengucapkan terimakasih kepada Professor Agata Smoktunowicz dari University of Edinburgh, United Kingdom yang telah memberikan inspirasi kepada penulis dalam menyelesaikan paper ini melalui komunikasi melalui surel. 7 Daftar Pustaka [1] _C. N.

Yang, "Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive," Physical Review Letters, pp. 1312-1315, 1967. _[2] _R. Baxter, "Partition function for the eight-vertex lattice model," Ann. Phys., vol. 70, p. 193-228., 1972. _[3] _R. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, London, UK: Academic Press, 1982. _[4] _F.

Nichita, "Introduction to the Yang-Baxter Equation with Open Problems," axioms, vol. 1, pp. 33-37, 2012. _[5] _Wikipedia, "en.wikipedia.org," Wikimedia Foundation, Inc, 7 November 2019. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory. [Accessed 26 February 2020]. _[6] _Wikipedia, "en.wikipedia.org," Wikimedia Foundation, Inc, 13 February 2020. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_group. [Accessed 26 February 2020]. _[7] _A.

Smoktunowicz and A. Smoktunowicz, "Set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation and new classes of R-matrices," Linear Algebra and its Applications, vol. 546, p. 86-114, 2018. _[8] _T. Gateva-Ivanova, "A combinatorial approach to the set-theoretical solutions of the Yang-Baxter equation," J. Math. Phys, vol. 45, p. 3828-3859, 2004. _[9] _L. Lambe and D. Radford, Introduction to the quantum Yang-Baxter equation and quantum groups: An algebraic approach.

In Mathematics and Its Applications 423, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997. _[10] _A. Smoktunowicz, "On Engel groups, nilpotent groups, rings, braces and the Yang-Baxter equation," Transactions of the American Mathematical Society, vol. 370, no. 9, pp. 6535-6564, 2018. _[11] _A. Smoktunowicz, "A note on set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation," Journal of Algebra, vol. 500, pp. 3-18, 2018.

_ [12] _M. Castelli, F. Catino and G. Pinto, "About a question of Gateva-Ivanova and Cameron on square-free set-theoretic solutions of the Yang-Baxter Equation," Communications in Algebra, pp. 1-13, 2020. _[13] _D. K. Matsumoto and K. Shimizu, "Quiver-theoretical approach to dynamical Yang-Baxter maps," Journal of Algebra, vol.

507, p. 47–80, 2018.

– [14] F. Cedó, A. Smoktunowicz and L. Vendramin, "Skew Left Braces of Nilpotent Type," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 118, no. 6, pp. 1367–1392, 2019. – [15] W. Rump, "Braces, radical rings, and the quantum Yang–Baxter equation," *Journal of Algebra*, vol. 307, p. 153–170, 2007. – [16] D. B. Perez, *Study of The Algebraic Structure of Left Braces and The Yang-Baxter Equation* (Ph.D Thesis), Barcelona, Spanyol: Universitat Autònoma de Barcelona, 2016.

– [17] E. Acri and M. Bonatto, "Skew braces of size pq ," *Communications in Algebra*, vol. preprint, pp. 1–20, 2020. – [18] L. Guarnieri and L. Vendramin, "Skew Braces and The Yang-Baxter Equation," *Mathematics of Computation*, vol. 86, no. 307, p. 2519–2534, 2017. – [19] D. B. Perez, "Counterexample to a conjecture about braces," *Journal of Algebra*, vol. 453, p. 160–176, 2016. – [20] F. Cedó, T. Gateva-Ivanova and A.

Smoktunowicz, "Braces and symmetric groups with special conditions," *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 222, no. 12, pp. 3877–3890, 2018. – [21] B. J. Gardner and R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*, New York: Marcel Dekker, Inc, 2004. – [22] P. W. Prasetyo, S. Wahyuni, I. E. Wijayanti and H. France-Jackson, "Dari Radikal Ring Ke Radikal Modul (From Radical of Rings To Radical of Modules)," in *Prosiding Seminar Nasional Matematika* 2014 Universitas Jember, Jember, 2014.

--

INTERNET SOURCES:

<1% - <https://lynafida.blogspot.com/2013/09/sosial-ekonomi-pertanian.html>
<1% -
<https://ginanjarabdurrahman.blogspot.com/2013/01/tugas-akhir-makalah-filsafat-pendidikan.html>
<1% - <https://nanangbasukisantoso.wordpress.com/category/historika/>
<1% -
<http://staffnew.uny.ac.id/upload/132206562/pendidikan/KOMPUTASI+FISIKA+UPLOAD.pdf>
<1% -
https://www.researchgate.net/publication/253216642_Evolution_of_the_Concept_of_the_Vector_Potential_in_the_Description_of_Fundamental_Interactions
<1% -
https://www.researchgate.net/publication/226250557_Unitary_Solutions_to_the_Yang-Baxter_Equation_in_Dimension_Four

<1% -

https://www.researchgate.net/publication/235537455_Optical_simulation_of_the_Yang-Baxter_equation

<1% - <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870819303871>

<1% -

https://www.researchgate.net/publication/2112297_A_combinatorial_approach_to_the_set-theoretic_solutions_of_the_Yang-Baxter_equation

<1% - <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321396004567>

<1% - https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_group

<1% - <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404912002022>

<1% - <http://repository.unpas.ac.id/37391/4/BAB%20II.pdf>

<1% - <https://henyik.blogspot.com/2011/08/pola-berpikir-deduktif-dan-induktif.html>

<1% - <https://retnimath.wordpress.com/bahan-ajar-struktur-aljabar/>

<1% -

<http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/pendidikan/Nikenasih%20Binatari,%20S.Si,%20M.Si./Handout%20Kalkulus%20Dasar.pdf>

<1% - <https://pendidikan-keilmuan.blogspot.com/2008/06/>

<1% - <https://cecepanwar.blogspot.com/2009/11/teori-bilangan-bab-1.html>

<1% - <https://www.slideshare.net/sfrannasoha/struktur-aljabar2>

<1% - <https://frendymatematik.files.wordpress.com/2012/07/ideal-dan-sifat-sifatnya.pdf>

<1% -

<https://arifinsamsul.wordpress.com/2010/04/04/sedikit-tentang-keprimaan-ideal-ring-submodul-dan-modul/>

<1% -

<https://docplayer.info/29698430-Menentukan-invers-moore-penrose-dari-matriks-kompleks.html>

<1% - <https://nungfainjah.blogspot.com/2013/>

<1% - <https://timotius-sukarman.blogspot.com/2012/02/teori-berlajar-dalam-pak.html>

1% -

https://www.researchgate.net/publication/306064711_Dari_Radikal_Ring_Ke_Radikal_Modul

<1% - <https://alisarjunip.blogspot.com/2013/07/contoh-latar-belakang-masalah.html>

<1% - <https://hpijogja.wordpress.com/category/artikel-pariwisata-budaya/page/8/>

<1% - <http://m.persamaankata.com/32818/oleh-sebab-itu>

<1% -

<https://id.123dok.com/document/y9dnk4jq-kelas-10-sma-bahasa-indonesia-guru-2017.html>

<1% - <https://ejournal.unib.ac.id/index.php/gradien/article/download/907/773>

<1% -

<https://www.kaskus.co.id/thread/55eebf7294786846588b456a/penggunaan-oli-mobil-p>

cmo-hdeo-untuk-motor---part-1/

<1% - <https://terraria.gamepedia.com/1.2.4.1>

<1% - <https://usmcr010.blogspot.com/2012/08/pembahasan-soal-olimpiade.html>

<1% - <https://www.gurupendidikan.co.id/sosial-budaya/>

<1% -

<http://library.binus.ac.id/eColls/eThesisdoc/Bab2/2014-2-00129-AKSI%20Bab2001.pdf>

<1% - <https://pcsx2.net/download/category/42-pcsx2-v1-2-1.html>

<1% -

<http://repository.usu.ac.id/bitstream/handle/123456789/20720/Chapter%20II.pdf;sequence=4>

<1% - <https://zombiedoc.com/seminar-nasional-matematika-2016.html>

<1% -

https://www.researchgate.net/publication/263787769_Direct_Verification_of_Yang-Baxter_Equation

<1% - <https://www.projecteuclid.org/euclid.tjm/1437506246>

<1% - <https://annals.math.princeton.edu/2010/172-2/p15>

<1% - <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379518300533>

<1% - https://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-8131-6_11

<1% -

[http://www.research.ed.ac.uk/portal/en/publications/on-engel-groups-nilpotent-groups-ring-braces-and-the-yangbaxter-equation\(2cff309a-6574-4daf-9da4-3c2f6fd1402e\)/export.html](http://www.research.ed.ac.uk/portal/en/publications/on-engel-groups-nilpotent-groups-ring-braces-and-the-yangbaxter-equation(2cff309a-6574-4daf-9da4-3c2f6fd1402e)/export.html)

<1% - <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0219498819502207>

<1% -

<https://shibaura.pure.elsevier.com/en/organisations/departement-of-mathematical-sciences/publications/>

<1% -

https://www.research.ed.ac.uk/portal/files/75771700/R1CedoSmokVendramin_002_.pdf

<1% - <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0219199718500426>

<1% -

<https://ddd.uab.cat/search?f=author&p=Ced%C3%B3%2C%20Ferran&sc=1&ln=ca>

<1% -

<http://www.ams.org/journals/tran/2018-370-09/S0002-9947-2018-07179-3/home.html>